Darstellung und Prüfung der Mercurtheorie des Claudius Ptolemaeus.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität zu Halle-Wittenberg

von

Paul Boelk

aus Berlin.

ACAD. LAVAL BIBL.

Halle 1911.

Referent: Seine Magnificenz Geheimer Regierungsrat
Professor Dr. Wangerin.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner,
Göttingen.

Darstellung und Prüfung der Mercurtheorie des Claudius Ptolemaeus*).

Die verschlungenen Bahnen des Mercurs am Sternenhimmel regten die Menschen früh zu eifrigem Beobachten an, und schon die Babylonier und Ägypter verfolgten seine scheinbaren Bewegungen und wandten seinen Schleifen, Stillständen und Retrogradationen wie seinen heliakischen Auf- und Untergängen ihre Aufmerksamkeit zu. So fanden sie, daß der Mercur innerhalb eines Jahres trotz seiner Schwankungen in der Breite und ohne sich weit von dem Sonnenorte zu entfernen, die sämtlichen Sternbilder der Ekliptik durchlief und nach einer bestimmten Anzahl von vollen Umläufen periodisch nahezu dieselben Wege am Himmelsgewölbe wiederholte. Ob sie bereits Erklärungen für die Unregelmäßigkeiten seines Laufes aufstellten oder empirische Methoden besaßen, seine Stellungen unter den Sternen vorauszubestimmen, ist aus den vorliegenden Nachrichten und Überlieferungen nicht sicher zu erkennen. Nachweisen lassen sich Versuche, die Mercurtheorie auf eine strenge, wissenschaftliche Grundlage aufzubauen, erst bei dem griechischen Astronomen und Mathematiker Eudoxus von Cnidus, einem Schüler der ägyptischen Priester, dessen hervorragende mathematischen Arbeiten Euklid in seine Geometrie aufnahm. Die spärlichen und unklaren Fragmente, welche sich von seinen Theorien bei anderen Schriftstellern finden, legen Zeugnis davon ab, daß er die Mercurbahn geometrisch mit Hilfe einer sphärischen, um die Sonne als Mittelpunkt beschriebenen Lemniskate nachbildete, deren Bestimmungsgrößen den beobachteten Bewegungen soweit als möglich entsprachen. Aber so scharfsinnig auch seine Untersuchungen waren, so vermochten sie nicht für längere Zeiten den Mercurbeobachtungen gerecht zu werden und mit den Stillständen und Retrogradationen in hinreichender Übereinstimmung zu bleiben. Daher gaben die Astronomen in der Folgezeit die Eudoxischen Theorien nach unwesentlichen Verbesserungen wieder auf und suchten in Anlehnung an die vorbildlichen Arbeiten Hipparchs über die Sonnen- und Mondbahn eine Erklärung für die Ungleichförmigkeiten der himmlischen Bewegungserscheinungen durch die einfacheren und durchsichtigeren Hypothesen des exzentrischen Kreises und des Epicykels zu gewinnen. Sie bauten ihre Betrachtungen auf der Voraussetzung auf, daß sich die zusammengesetzten scheinbaren Bewegungen des Mercurs in gleichmäßig kreisförmige zerlegen ließen und daß es möglich wäre, die zodiakale Ungleichheit durch einen exzentrischen Kreis und die Elongationen von der Sonne durch einen Epicykel in allen Einzelheiten darzustellen. Da aber der Mercur unter allen der im Altertume bekannten

*) Die Abhandlung ist am 3. August 1905 von der philosophischen Fakultät der Friedrich Wilhelms-Universität mit dem Königlichen Preise gekrönt worden.

Planeten die größten Verschiedenheiten in seinem Laufe aufwies und sich am weitesten von der Ekliptik entfernte, so reichten diese Voraussetzungen allein zu einer exakten Bahnbestimmung nicht aus, wie sehr man auch bedacht war, die numerischen Elemente den Beobachtungen gemäß anzunehmen. Das Verdienst, die Mercurtheorie mit Erfolg in strenger und erschöpfender Weise behandelt zu haben, gebührt erst dem großen Alexandriner Claudius Ptolemaeus, dem es gelang, ein Gesetz aufzufinden, das unter der Annahme der fortschreitenden Bewegung der Erde zu der Entdeckung des Kepplerschen Flächensatzes führen mußte und in der Tat nach den ausgezeichneten Untersuchungen von W. Foerster („Ptolemaeus und Keppler“ Weltall 3, 1902, S. 1—10) auch eine wesentliche Grundlage der Planetentheorien im kopernikanischen Systeme bildet. Die historisch-kritischen Arbeiten Delambres (Histoire de l'astronomie ancienne, Paris 1817) werfen auf diese mathematischen Feinheiten der ptolemaeischen Lehren nicht das rechte Licht und beurteilen im besonderen die Mercurtheorie mit geringer Sorgfalt und Objektivität. Ebenso wenig geben P. Tannery (Recherches sur l'histoire de l'astronomie, Paris 1893) und A. Haebler (Die Lehren des Claudius Ptolemaeus von den Bewegungen der Planeten, Berlin 1900) eine eingehende und befriedigende Darstellung der Mercurbahn: Tannery legt seinen Erörterungen nicht das klassische Werk des Ptolemaeus, den Almagest, zu Grunde, sondern eine andere weniger inhaltreiche Schrift und beschränkt sich auf die notwendigste mathematische Beweisführung, während Haebler eine Übersicht über die Ausgaben der ptolemaeischen Werke und seiner Kommentare darbietet und Bruchstücke der wertvollen Dissertation von Kempf (Untersuchungen über die ptolemaeische Theorie der Mondbewegung, Berlin 1878) in wortgetreuem Abdruck bringt. Die zuverlässigste und auf gründlichem Quellenstudium beruhende Darstellung verdanken wir Herz, dessen „Geschichte der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen“, T. I, 1887 in der Literatur bisher nicht die gebührende Beachtung gefunden hat und auch weder von Haebler noch von Tannery erwähnt wird. Unter Berücksichtigung dieser Vorarbeiten sei im folgenden untersucht, wie Ptolemaeus die schwierigste aller Planetentheorien, die Mercurtheorie, mit den ihm eigenen mathematischen Hilfsmitteln behandelte, zu welchen Ergebnissen er gelangte und welche Genauigkeit seine Forschungen erreichten.

Betrachtet man die ptolemaeischen Planetentheorien in ihrer reinsten und ursprünglichsten Gestalt, so wie sie im Almagest niedergelegt sind, ohne Rücksicht auf die späteren, mittelalterlichen Bearbeitungen, so stellen sie eine logische, rein mathematische Behandlung des Problems dar, unter Voraussetzung der Ruhelage der Erde den Lauf der Wandelgestirne durch elementar geometrische Konzeptionen zu erklären. Ptolemaeus geht in seinen Untersuchungen von einfachen, naheliegenden Annahmen aus, welche sich den Erscheinungen in der Natur eng anpassen, und prüft, ob die Folgerungen, die sich aus seinen Hypothesen ziehen lassen, mit den Wahrnehmungen übereinstimmen. Treten Abweichungen auf, so beobachtet er sie längere Zeit, sucht ihre Größe und Periodizität einwandfrei festzustellen und erst, nachdem er eine vollkommene Einsicht in ihre Eigenheiten gewonnen hat, verfeinert er seine Methoden dahin, daß sie

der größten Ungleichheit gerecht werden. Dann setzt er dieses Verfahren in derselben Weise unermüdlich fort, bis er seine Theorie unter beständiger Vergleichung mit den Beobachtungen stufenweise so weit ausgebildet hat, daß sie die hauptsächlichsten Abweichungen mit Sicherheit und Genauigkeit darstellt. Um die Gesetze der Mercurbewegung aufzufinden, unterzieht Ptolemaeus sechs verschiedene Punkte der Bahn, in denen die stärksten Unregelmäßigkeiten stattfinden, einer sorgfältigen Prüfung und stellt dann eine Theorie auf, welche diesen Ungleichheiten in allen Einzelheiten genügt. So erreicht er es, daß an den übrigen Punkten der Bahn der Unterschied zwischen seinen theoretischen Entwickelungen und den Beobachtungen nur von der zweiten Ordnung sein kann. Er erkennt rückhaltlos an, daß seine Arbeiten nicht als abgeschlossen anzusehen sind, und richtet an spätere Generationen wiederholt die Mahnung, an seinem Werke fortzuarbeiten und es zu verbessern. Vergleicht man daher seine naturwissenschaftlichen Untersuchungen mit denen der neueren Astronomie, so sind sie ihrem Wesen nach nahe verwandt, obwohl die Voraussetzungen sich geändert haben und die geometrischen Methoden durch analytische ersetzt worden sind.

Die mittlere zodiakale und anomalistische Bewegung des Mercurs.

Ehe die Alten die Bahn des Mercurs im einzelnen erforschen und seine Stellungen am Himmel berechnen konnten, mußten sie diejenigen Perioden ermittelt haben, in denen die Erscheinungen annähernd gesetzmäßig wiederkehrten. Seit jeher unterschieden sie zwei von einander unabhängige, mittlere Bewegungen der Planeten: Die erste umfaßte die Zeit eines zodiakalen Umlaufes um die Erde und die zweite die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Retrogradationen. So gibt Ptolemaeus als Beobachtung Hipparchs an, daß der Mercur in 46 Sonnenjahren $1^1/_{30}$ Tagen 46 Umläufe um die Ekliptik $+1^0$ ausführe und in dieser Zeit nahezu 145 mal retrograd erscheine, oder 145 Restitutionen der Anomalie vollende. Die mittlere zodiakale Bewegung des Mercurs stimmt daher mit derjenigen der Sonne überein; eine Wahrnehmung, welche, verbunden mit der Tatsache, daß auch seine Elongationen von der Sonne innerhalb enger Grenzen bleiben, Ptolemaeus bestimmt, die von der Erde ausgehende Richtung nach dem mittleren Orte dieses Planeten mit derjenigen nach dem mittleren Sonnenorte zusammenfallen zu lassen und die Sonnentafeln für die mittlere zodiakale Bewegung zu Grunde zu legen. Da Ptolemaeus das Sonnenjahr zu $365^d\,5^h\,55^m\,14''\,48'''$ = 365,2467 Tagen annimmt und in dieser Zeit der mittlere Sonnenort mit gleicher Geschwindigkeit 360^0 der Ekliptik umläuft, so ist die mittlere Bewegung der Sonne oder des Mercurs für einen Tag:

$$0^0\,59'\,8''\,17'''\,13^{IV}\,12^{V}\,31^{VI} = 0^0{,}985\,635\,2784$$

für eine Stunde

$$0^0\,2'\,27''\,50'''\,43^{IV}\,3^{V}\,1^{VI} = 0^0{,}041\,068\,1366$$

für ein ägyptisches Jahr zu 365 Tagen:

$$359^0\,45'\,24''\,45'''\,21^{IV}\,8^{V}\,35^{VI} = 359^0{,}756\,876\,6314$$

und für einen Zyklus von 18 ägyptischen Jahren nach Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von 360°

$$355^\circ\,37'\,25''\,36'''\,20^{IV}\,34^{V}\,30^{VI} = 355^\circ,623\,779\,3654.$$

Um mit Hilfe dieser Zahlenwerte zu jeder gegebenen Beobachtungszeit den mittleren Ort, den die Sonne oder der Mercur einnimmt, auffinden zu können, gibt Ptolemaeus als Epoche an, daß am 1. Thot des Jahres 1 Nabonassar um Mittag = 26. Februar, — 746 (julian. Stil) der mittlere Ort auf 0°45′ Fische = 330°45′ fiel.

Die mittlere anomalistische Bewegung des Mercurs läßt sich aus der Angabe ermitteln, daß in 46 Sonnenjahren $1^1/_{30}$ Tagen ungefähr 145 Restitutionen stattfinden. Verwandelt man die Sonnenjahre in Tage und teilt den Umlauf der Anomalie in 360°, so entsprechen $16\,802^{Tg}\,22'\,48''$ einer Anomalie von 52 200°. Für die Errichtung von Tafeln verwendet Ptolemaeus den genaueren Wert von $16\,802^{Tg}\,24'$, den er aus der Beobachtung erhält, daß in 402 ägyptischen Jahren 283 Tagen $13^1/_2$ Stunde 1268 volle Umläufe + 246°53′ stattfinden. Mit diesem ergibt sich für die mittlere anomalistische Bewegung des Mercurs an einem Tage:

$$3^\circ\,6'\,24''\,6'''\,59^{IV}\,35^{V}\,50^{VI} = 3^\circ,106\,699\,0430$$

in einer Stunde:

$$0^\circ\,7'\,46''\,0'''\,17^{IV}\,28^{V}\,59^{VI}\,35^{VII} = 0^\circ,129\,445\,7935$$

in einem ägyptischen Jahre nach Abtrennung der vollen Restitutionen:

$$53^\circ\,56'\,42''\,32'''\,32^{IV}\,59^{V}\,10^{VI} = 53^\circ,945\,150\,6939$$

und in einem Zeitraum von 18 ägyptischen Jahren:

$$251^\circ\,0'\,45''\,45'''\,53^{IV}\,45^{V}\,0^{VI} = 251^\circ,012\,712\,4807.$$

Eine andere Bestimmung dieser Bewegung ist in den „Hypothesen“ enthalten, einem Werke, welches nachweislich später als der Almagast verfaßt ist. Hier legt Ptolemaeus ein Intervall von 993 Sonnenjahren zu Grunde und gibt wahrscheinlich unter Benutzung chaldäischer oder ägyptischer Überlieferungen an, daß der Mercur in dieser Zeit 3130 Restitutionen ausführe, daß somit die mittlere tägliche anomalistische Bewegung

$$3^\circ\,6'\,24''\,25'''\,45^{IV}\,33^{V}\,43^{VI} = 3^\circ\,106\,785\,9230$$

betrage. Diese zweite Berechnung besitzt gegenüber der ersten den Vorzug, daß sie sich auf eine nahezu tausendjährige Beobachtungszeit stützt, ein Umstand, der wesentlich zur Verminderung der Fehler beiträgt. In einer Abhandlung über den Mercur erhebt Lalande den Einwand, daß die mittlere anomalistische Bewegung, verglichen mit der der anderen Planeten, jährlich um 15″ fehlerhaft ist; diese Behauptung ist nicht begründet und später von Lalande selbst widerrufen.

Die Theorie des exzentrischen Kreises.

Der scheinbare, alltäglich wiederkehrende Umschwung des Fixsternhimmels um die Weltachse, das Spiegelbild der Erdrotation, bot den Menschen frühzeitig die Wahrnehmung dar, daß sich die Himmelskörper in Kreislinien mit gleichmäßiger

Winkelgeschwindigkeit um die Himmelspole bewegten und daß unter allen periodischen Umläufen diejenigen, die auf Kreisen stattfänden, die einfachsten und symmetrischsten ihrer Art wären. Diese Erkenntnis führte sie dazu, auch für die Wandelgestirne kreisförmige Bahnen vorauszusetzen und alle Ungleichheiten, welche sie in ihrem Laufe entdeckten, durch diese Voraussetzungen zu erklären. Zwei Annahmen standen ihnen gleichberechtigt gegenüber: entweder durchliefen die Gestirne einen zur Erde konzentrischen Kreis mit einer Geschwindigkeit, welche um einen von dem Zentrum verschiedenen Punkte gleichförmig erfolgte, oder sie bewegten sich in einem zur Erde exzentrischen Kreise mit einer konstanten Geschwindigkeit um den Mittelpunkt. Beide Hypothesen wurden der Erscheinung gerecht, daß die Wandelgestirne in gleichen Zeiten ungleiche Bogen am Himmel beschrieben, vorausgesetzt, daß die größte und kleinste Bewegung, von der Erde aus gesehen, diametral gegenüber lagen. Von diesen Annahmen bevorzugten die Alten die zweite als die einfachere und entschieden sich dafür, den Mittelpunkt der Kreisbahn vom Standorte des Beobachters zu trennen und die gleichförmige Bewegung um das Zentrum beizubehalten. So wenig inhaltreich diese Exzentrizitätsvorstellung auch erscheinen mag, so war sie immerhin einer der ersten Versuche menschlichen Denkens, äußere Vorgänge der Erscheinungswelt durch strenge, mathematische Hypothesen darzustellen. Zur Zeit des Ptolemaeus war die Theorie des exzentrischen Kreises vollkommen ausgebildet und abgeschlossen und gehörte zu den Fundamentallehren der Astronomie. Da der exzentrische Kreis auch für die Mercurtheorie Verwendung findet, so betrachten wir seine Eigenschaften näher.

In der Ebene der Ekliptik denke man sich um einen Punkt M mit hinlänglich großem Radius einen Kreis beschrieben (Fig. 1), der den Mittelpunkt E der Erde, das centrum visionis, umschließe und auf dessen Peripherie sich ein Himmelskörper P im Sinne der Zeichen mit gleichförmiger Geschwindigkeit um M bewege. Unter allen Lagen, die er während seines Umlaufes einnimmt, gibt es zwei ausgezeichnete, das Apogäum A und das Perigäum A', deren gerade Verbindungslinie eine Symmetrieachse seiner Bahn ist und durch die Punkte M und E hindurchgeht. Während von M aus gesehen das Gestirn in gleichen Zeiten gleiche Bogen der Ekliptik durchläuft, erscheint seine Bewegung in E als ungleichförmig und bald im Wachsen und bald im Abnehmen begriffen. Man bestimmt die gleichmäßige Bewegung um M durch $\sphericalangle AMP$, die ungleichmäßige um E durch $\sphericalangle AEP$ und die Differenz zwischen der gleichmäßigen und ungleichmäßigen durch die Mittelpunktsgleichung $\sphericalangle MPE$.

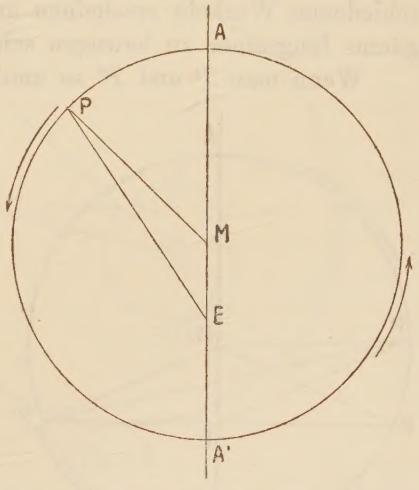

Fig. 1.

Wenn man von der Erde E aus zwei Lagen P und P' des Gestirns, welche

mit M in gerader Linie liegen, betrachtet (Fig. 2) und PP' nicht mit AA' zusammenfällt, dann gelten allgemein die Beziehungen:

$$\sphericalangle AEP < \sphericalangle AMP \text{ um } \sphericalangle MPE.$$
$$\sphericalangle A'EP' > \sphericalangle A'MP' \text{ um } \sphericalangle MP'E$$

und da $\sphericalangle AMP = \sphericalangle A'MP'$ ist, so folgt $\sphericalangle AEP < \sphericalangle A'EP'$

und hiermit ist dargetan, daß die gleichen Bogen AP und $A'P'$ in E unter verschiedenen Winkeln erscheinen und daß sich das Gestirn in der Nähe des Apogäums langsamer zu bewegen scheint, als in der Nähe des Perigäums.

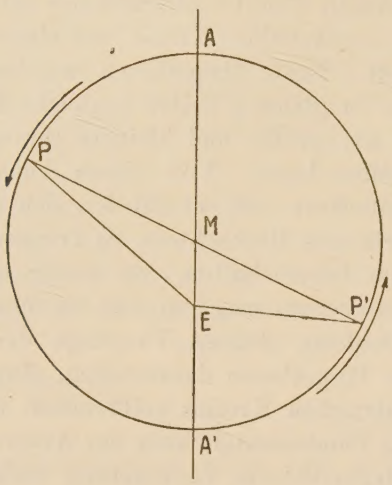

Fig. 2.

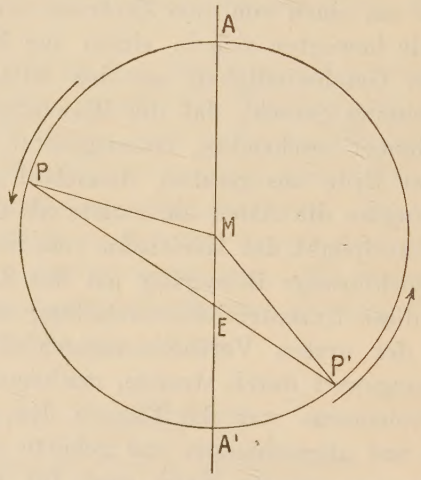

Fig. 3.

Wenn man P und P' so annimmt, daß sie in E um 180^0 von einander entfernt erscheinen (Fig. 3), so ist $\sphericalangle MPE = \sphericalangle MP'E$, und daher sind die Mittelpunktsgleichungen für P und P' entgegengesetzt gleich. Sie erreichen ihren größten Wert, wenn PP' senkrecht zu AA' ist, oder wenn PP' die kürzeste durch E gehende Sehne ist. Dies beweist Ptolemaeus durch ein einfaches, elementar-geometrisches Verfahren, das in trefflicher Weise darlegt, wie die Alten Maximumaufgaben ohne Zuhilfenahme infinetisimaler Betrachtungen behandelten. Angenommen der Bogen AP_1 (Fig. 4) sei, im Sinne der wachsenden Winkel erstreckt, kleiner als $\widehat{AP}$. Dann ist $P_1E > EP'$ und folglich $\sphericalangle P_1P'E > \sphericalangle P'P_1E$. Da aber $\sphericalangle P_1P'M = \sphericalangle P'P_1M$ ist, so ist auch $\sphericalangle EP'M > \sphericalangle EP_1M$ oder $\sphericalangle EPM > \sphericalangle EP_1M$. Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß wenn $\widehat{AP}_1 > \widehat{AP}$ ist, dieselbe Ungleichheit besteht. Hieraus ergibt sich, daß die Mittelpunktsgleichung

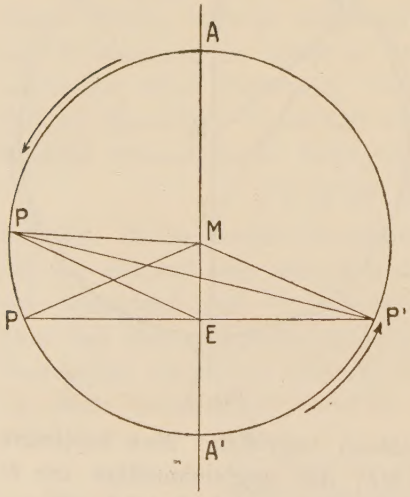

Fig. 4.

ihren größten Wert annimmt, wenn PP' senkrecht zu AA' ist oder wenn das Gestirn dem Auge des Beobachters um 90^0 östlich oder westlich vom Apogäum entfernt erscheint.

Die Epizykeltheorie.

Wenn auch der exzentrische Kreis bei geeigneter Bestimmung seiner Elemente die einfachsten Ungleichförmigkeiten der himmlischen Bewegungen mit genügender Annäherung wiedergab und für die Sonnentheorie wertvolle Dienste leistete, so ließen sich mit seiner Hilfe nur diejenigen Erscheinungen erklären, welche sich nach einem einmaligen Umlaufe periodisch wiederholten. Da aber für den Mond und für die Planeten diese Voraussetzung nicht zutraf, so erweiterten die Alten die Theorie des exzentrischen Kreises in der Weise, daß sie seinen Mittelpunkt als beweglich betrachteten und ihn in einem Kreise mit gleichmäßiger Geschwindigkeit um die Erde führten. Im wesentlichen reichte dieser bewegliche exzentrische Kreis, der Epizykel, bereits aus, um die Bewegung der Planeten darzustellen, wenn nur noch sein Radius zweckmäßig angenommen wurde. So ist die fruchtbare Theorie der Epizykeln, welche die wissenschaftliche Grundlage des ptolemaeischen Systems bildet, als eine naturgemäße Verallgemeinerung der Lehre von dem exzentrischen Kreise zu betrachten.

Um die für die Mercurbahn in Anwendung kommenden Sätze der Epizykeltheorie zu entwickeln, nehme man in der Ebene der Ekliptik (Fig. 5a, 5b) einen Kreis mit dem Mittelpunhte E an, dem Standorte des Beobachters, dessen Peri-

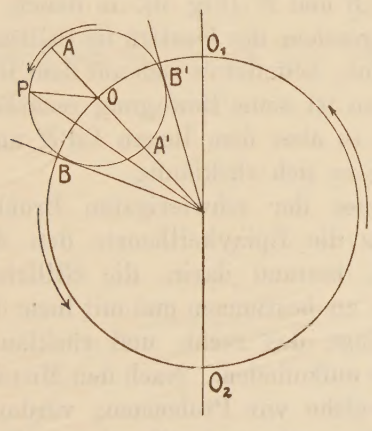

Fig. 5a.

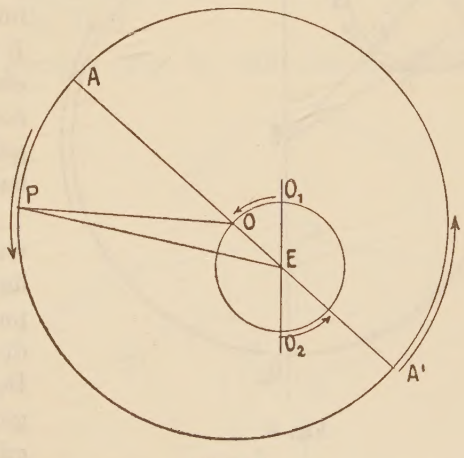

Fig. 5b.

pherie der Mittelpunkt O des Epizykels mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω im Sinne der Tierzeichen durchlaufe. Befindet sich ein Himmelskörper im Punkte P des Epizykels, so stellt, bezogen auf einen festen Durchmesser O_1O_2 des Deferenten, $\sphericalangle O_1EO$ seine mittlere Bewegung, $\sphericalangle O_1EP$ seine scheinbare Bewegung und $\sphericalangle OEP$ seine Mittelpunktsgleichung oder seine östliche oder westliche Elongation von seinem mittleren Orte dar. Man setze voraus, daß das Gestirn mit der Geschwindigkeit ω' gleichmäßig um das Zentrum des Epizykels

in der Weise seine Umläufe vollführe, daß die beiden Kreisbewegungen, welche sich übereinander lagern, gleichstimmig sind. Wenn dann von der Erde aus gesehen der mittlere Ort mit dem wahren zusammenfällt, so ist das Gestirn entweder im Apogäum A oder im Perigäum A' des Epizykels, jenachdem seine Anomalie $\sphericalangle AOP$, gemessen im Fortschreitungssinne von P, gleich 0^0 oder 180^0 ist; eine Wiederholung aller Erscheinungen erfolgt, sobald die Anomalie um ganzzahlige Vielfache von 2π gewachsen ist.

Beschränkt man sich auf den Fall, daß der Radius des Epizykels kleiner als der des Deferenten ist, eine Spezialisierung, welche für die Planeten in Betracht kommt, so erreichen die Elongationen des Gestirns von seinem mittleren Orte ihre größten Werte in den Berührungspunkten B, B' (Fig. 5a) der von E an den Epizykel gezogenen Tangenten derart, daß in B die größte westliche und in B' die größte östliche Elongation stattfindet; hierdurch erklärt sich die Tatsache, daß, von der Erde aus gesehen, bestimmte Elongationen nicht überschritten werden, wie es für den Mercur die Beobachtungen zeigen. Unter Beibehaltung gleicher Drehungssinne erfolgt die größte Bewegung des Himmelskörpers in der Nähe des Apogäums und die kleinste in der Nähe des Perigäums, da sich die Geschwindigkeiten einmal addieren, das andere Mal subtrahieren; überwiegt im Perigäum die Bewegung der Anomalie gegenüber der zodiakalen, so wird der Planet gegen die Zeichen getragen, und es gibt dann zwei Stellungen S und S' (Fig. 6), in denen, von E aus gesehen, das Gestirn im Stillstande erscheint; befindet es sich auf dem Bogen SAS', so ist seine Bewegung rechtläufig, gehört es aber dem Bogen $SA'S'$ an, so bewegt es sich rückläufig.

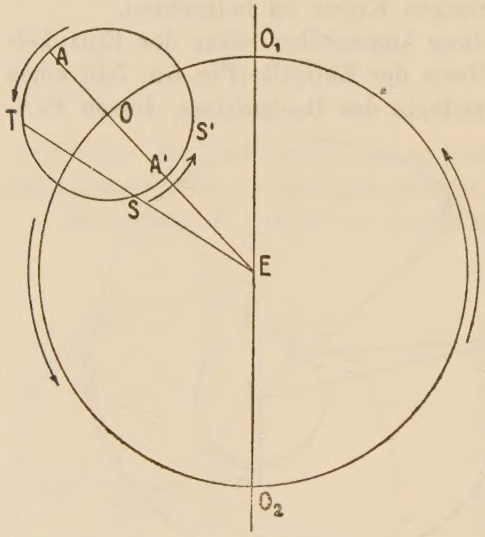

Fig. 6.

Eines der schwierigsten Probleme, welches die Epizykeltheorie den Alten darbot, bestand darin, die Stillstandspunkte zu bestimmen und mit ihrer Hilfe die Länge des recht- und rückläufigen Bogens aufzufinden. Nach den Mitteilungen, welche wir Ptolemaeus verdanken, gab unter anderen Apollonius von Pergae eine einfache Lösung dieser Aufgabe, indem er zeigte, daß wenn sich eine Gerade EST von dem Auge des Beobachters nach dem Epizykel so ziehen ließe, daß

$$\frac{{}^1/_2 TS}{SE} = \frac{\omega}{\omega'}$$

wäre, sie notwendig durch einen Stillstandspunkt S ginge. Um dies zu beweisen, gibt Apollonius einen Hilfssatz an:

Auf der Seite BC eines Dreiecks ABC (Fig. 7), in welchem $BC > CA$ ist, nehme man einen Puukt D' so an, daß $D'C > CA$ ist; dann besteht die Ungleichheitsbedingung

$$\frac{CD'}{D'B} > \frac{\sphericalangle ABC}{\sphericalangle ACB}.$$

Es sei D auf BC so gewählt, daß $AC = CD$ ist; man konstruiere das Parallelogramm $ADCE$, bestimme den Schnittpunkt F der Verlängerungen von AB und CE und beschreibe um A mit AC den Kreis, welcher durch E hindurchgeht und AF in G schneidet; es ist dann

$$\begin{aligned} \measuredangle AEF &> \text{Sektor } AEG \\ \measuredangle ACE &< \text{Sektor } ACE \end{aligned}$$

und folglich:

$$\frac{\measuredangle AEF}{\measuredangle ACE} > \frac{\text{Sektor } AEG}{\text{Sektor } ACE}.$$

Es ergibt sich aber:

$$\begin{aligned} \frac{\measuredangle AEF}{\measuredangle ACE} &= \frac{FE}{EC} = \frac{CD}{DB} \\ \frac{\text{Sektor } AEG}{\text{Sektor } ACE} &= \frac{\sphericalangle EAG}{\sphericalangle CAE} = \frac{\sphericalangle ABC}{\sphericalangle ACB}. \end{aligned}$$

Demnach $\frac{CD}{DB} > \frac{\sphericalangle ABC}{\sphericalangle ACB}$ und wenn man die linke Seite noch vergrößert

$$\frac{CD'}{D'B} > \frac{\sphericalangle ABC}{\sphericalangle ACB}.$$

Angenommen die Gerade EST sei so gezogen (Fig. 8), daß sich die Hälfte der

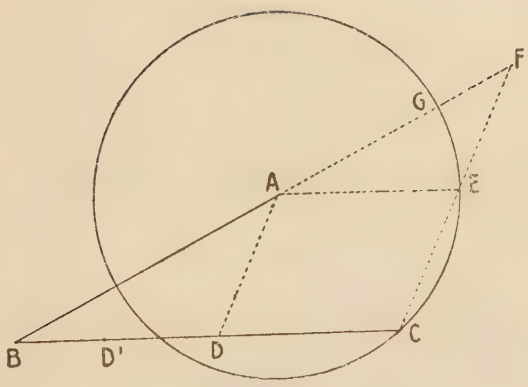

Fig. 7.

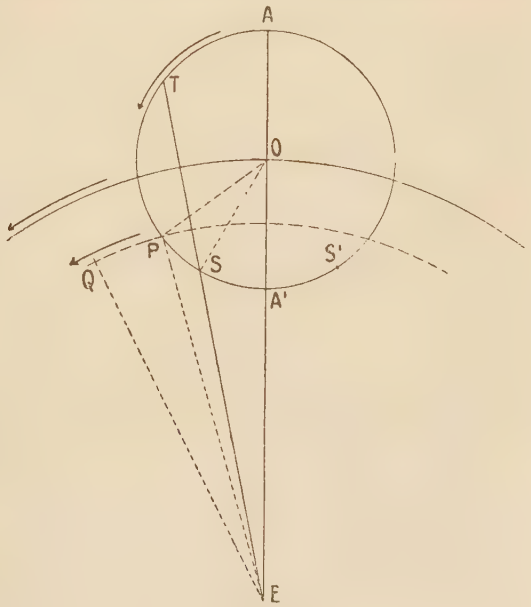

Fig. 8.

Sehne TS zu dem äußeren Abschnitte SE der Sekante wie die Geschwindigkeit des Epizykels zu der des Gestirnes verhalte, daß mithin

$$\frac{{}^1/_2\, TS}{SE} = \frac{\omega}{\omega'}$$

sei. Wenn sich das Gestirn P in der Nähe des Punktes S auf der Seite des Apogäums befindet und nach Ablauf der Zeit t vermöge seiner Anomalie-Bewegung den Punkt S und vermöge seiner zodiakalen Bewegung den Funkt Q erreichen würde, so hat man

$$\sphericalangle PEQ = \omega t \text{ und } \sphericalangle POS = \omega' t.$$

In dem Dreiecke TPE ist $ET > TP$ und $ST > TP$. Daher ergibt sich nach unserem Hilfssatze

$$\frac{TS}{SE} > \frac{\sphericalangle PET}{\sphericalangle ETP}.$$

Es ist aber

$$\frac{TS}{SE} = 2\frac{\omega}{\omega'} = 2\frac{\sphericalangle PEQ}{\sphericalangle POS} = \frac{\sphericalangle PEQ}{\sphericalangle ETP}.$$

Setzt man dies ein, so folgt, da die Nenner übereinstimmen:

$$\sphericalangle PEQ > \sphericalangle PET.$$

Bevor das Gestirn den Punkt S erreicht, bewegt es sich um $\sphericalangle PEQ - \sphericalangle PET$ im Sinne der Zeichen, somit rechtläufig.

Befindet sich dagegen das Gestirn in S und gelangt es nach der Zeit t zu dem Punkte P seines Epizykels (Fig. 9), ohne das Perigäum zu überschreiten, so ist:

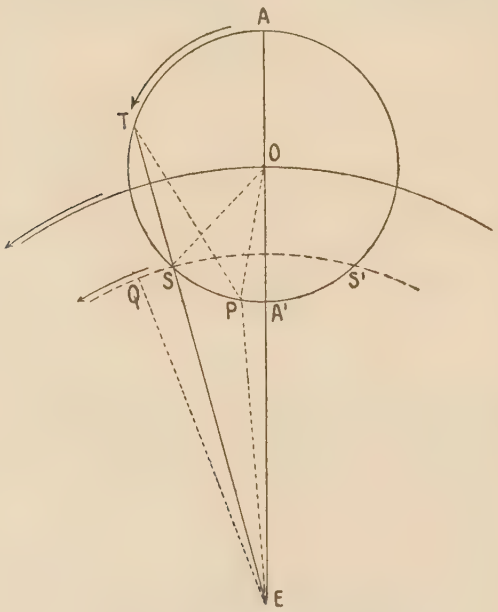

Fig. 9.

$$\sphericalangle SEQ = \omega t \text{ und } \sphericalangle SOP = \omega' t.$$

Aus dem Dreiecke TPE, in welchem $ET > TP$ und $SE > EP$ ist, erhält man:

$$\frac{ES}{ST} > \frac{\sphericalangle ETP}{\sphericalangle PET} \text{ oder}$$

$$\frac{TS}{SE} > \frac{\sphericalangle PET}{\sphericalangle ETP} \text{ und da}$$

$$\frac{TS}{SE} = 2\frac{\omega}{\omega'} = 2\frac{\sphericalangle SEQ}{\sphericalangle POS} = \frac{\sphericalangle SEQ}{\sphericalangle ETP} \text{ ist:}$$

$$\sphericalangle SEQ < \sphericalangle SEP.$$

Nach der Zeit t hat sich das Gestirn um $\sphericalangle SEP - \sphericalangle SEQ$ gegen die Ordnung der Zeichen, mithin rückläufig bewegt.

Hiermit ist bewiesen, daß der Punkt S ebenso wie der zu OE symmetrisch gelegene S' die direkte Bewegung des Gestirns von der retrograden trennen, daß S und S' folglich die Stillstandspunkte sind.

Anwendung der Epizykeltheorie auf die Bewegung des Mercurs.

Nachdem im vorangehenden die wesentlichsten Prinzipien, auf welche Ptolemaeus seine Planetentheorie gründet, angegeben sind und ihr inniger Zusammenhang mit den einfachsten geometrischen Grundbegriffen aufgedeckt ist, betrachten wir die Mercurtheorie in ihrer Entwickelung im besonderen und untersuchen die inneren Gründe, die ihren Entdecker zu seinen Annahmen führen. Zunächst findet er aus den Beobachtnngen allgemein das Gesetz erfüllt, daß der Mercur eine weit längere Zeit gebraucht, um von dem Augenblicke seiner schnellsten direkten Bewegung zu seiner größten Elongation von dem mittleren Orte überzugehen, als von dieser zu seiner schnellsten retrograden Bewegung. Denken wir uns (Fig. 10), daß der Epizykelmittelpunkt O in der Ordnung der Zeichen auf dem Deferenten fortschreite, daß aber der Umlauf des Planeten um O im entgegensetzten Sinne erfolge; dann findet die schnellste direkte Bewegung im Perigäum A' und die größte retrograde im Apogäum A des Epizykels statt. Sind B und B' die Orte der größten Elongationen, betrachtet von dem Mittelpunkte E des Deferenten, so ist Bogen $A'B$ kleiner als Bogen BA; daher müßte der Mercur infolge seiner gleichmäßigen Geschwindigkeit auf dem Epizykel kürzere Zeit gebrauchen, um von der schnellsten direkten Bewegung zu der größten Elongation zu gelangen, als von dieser zu seiner größten retrograden Bewegung. Da dies aber den Beobachtungen widerspricht, so kann der Mercur auf seinem Epizykel nur in dem Sinne seine Umläufe ausführen wie der Punkt O auf dem Deferenten, oder die beiden Kreisbewegungen können nur gleichstimmig sein.

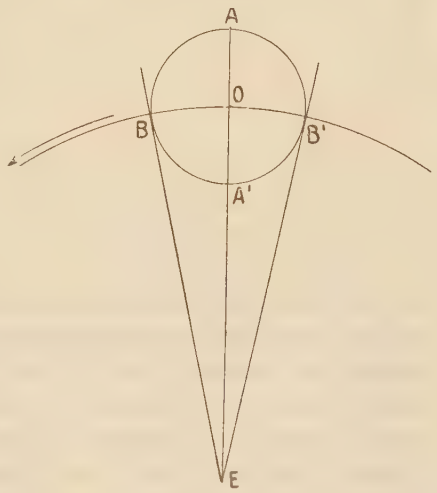

Fig. 10.

Um die Bewegung der Längenkoordinate darzustellen, nehme man an (Fig. 11), das Zentrum des Epizykels schreite mit der mittleren zodiakalen Geschwindigkeit des Mercurs auf dem Deferenten fort, oder was auf dasselbe hinauskommt, erscheine von der Erde aus gesehen stets in derselben Richtung wie der mittlere Sonnenort, während gleichzeitig der Planet seiner anomalistischen Bewegung gemäß den Epizykel durchlaufe. Wenn diese Voraussetzungen die Bahn des Mercurs am Himmel nachbilden, so müssen sich sowohl nach jeder Restitution der Anomalie einem Beobachter in E dieselben Wahrnehmungen darbieten als

auch die größten östlichen und westlichen Elongationen von dem mittleren Orte als gleich erweisen, Erscheinungen, welche Ptolemaeus in der Natur nicht bestätigt findet und die ihn dazu führen, den Beobachtungsort E von dem Mittelpunkte M des Deferenten loszulösen und ihm eine exzentrische Stellung zu geben. Durch diese Erweiterung erscheint das Zentrum des Epyzikels (Fig. 12) von der Erde aus betrachtet in einer anderen Richtung als der mittlere Sonnenort S, und es erklärt sich die Tatsache, daß im allgemeinen die größten östlichen und westlichen Elongationen von dem mittleren Sonnenorte verschieden sind und sich

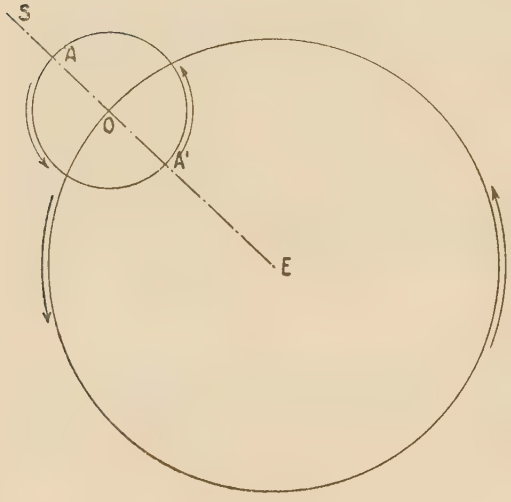

Fig. 11.

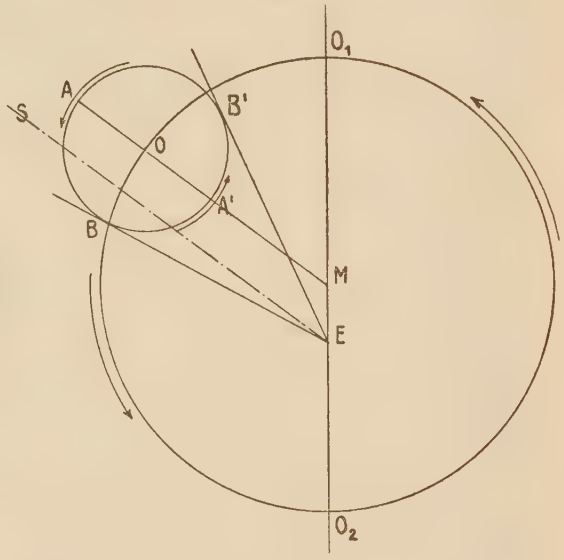

Fig. 12.

mit der Lage des Epizykels ändern. Da in jedem Augenblicke die Verbindungsgerade OM der beiden Kreismittelpunkte zu der Linie ES, die nach dem mittleren Sonnenorte hinweist, parallel bleibt, so werden sich während eines vollen zodiakalen Umlaufes die beiden Strahlen OM und ES zweimal decken, wenn sie entweder durch das Apogäum O_1 oder durch das Perigäum O_2 des exzentrischen Kreises hindurchgehen. Die Punkte O_1 und O_2 geben zugleich diejenigen Orte für das Epizykelzentrum, für welche die östlichen und westlichsten größten Elongationen von der mittleren Sonne einander gleich erscheinen, und sind sowohl durch diese Eigenschaft als auch dadurch bestimmt, daß die Elongationen in Bezug auf die Linie O_1O_2 symmetrisch erfolgen. Denkt man sich für eine Epoche die Neigung der Geraden O_1O_2 gegen die Fundamentalrichtung nach dem Frühjahrspunkt ermittelt und auch die Sehwinkel beobachtet, unter denen der Epizykel im Apogäum und Perigäum des exzentrischen Kreises von der Erde aus betrachtet, erscheint, so läßt sich hieraus das Verhältnis der Radien des Deferenten und des Epizykels wie auch die Größe und die Richtung der Exzentrizität der Erde berechnen und somit die Theorie für die Stellungen O_1 und O_2 des Epizykels den Beobachtungen auf das sorgfältigste anpassen.

Um weitere Teile der Bahn einer genauen Prüfung zu unterwerfen und festzustellen, wie weit die zu Grunde gelegten Hypothesen ausreichen, betrachtet Ptolemaeus die um 90° von dem Apogäum O_1 entfernten Lagen des Epizykels (Fig. 13), die sich von den übrigen dadurch unterscheiden, daß wenn Abweichungen

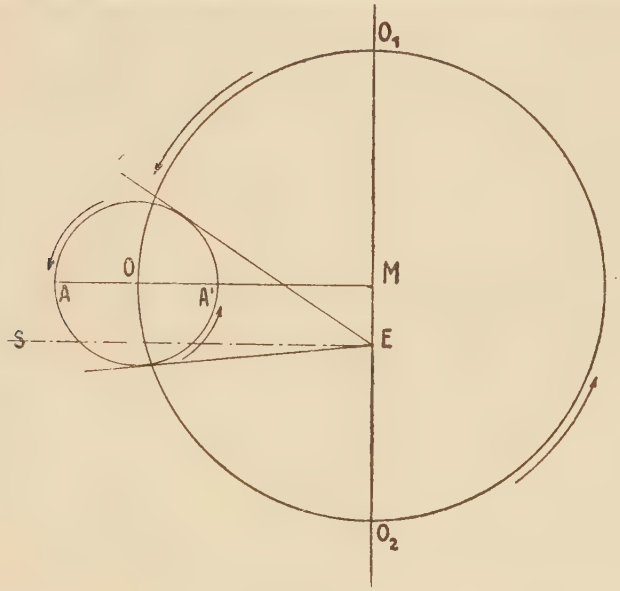

Fig. 13.

zwischen der Theorie und den Beobachtungen bestehen, sie hier am stärksten hervortreten. In der Tat findet er, daß die größten östlichen und westlichen Elongationen vom mittleren Sonnenorte, wie sie sich durch Rechnung ergeben, mit den beobachteten nicht übereinstimmen, eine Tatsache, die ihn bestimmt, die gleichförmige Bewegung des Epizykelzentrums auf dem Deferenten nicht um den Punkt M sondern um einen anderen geeignet zu wählenden Punkte F (Fig. 14)

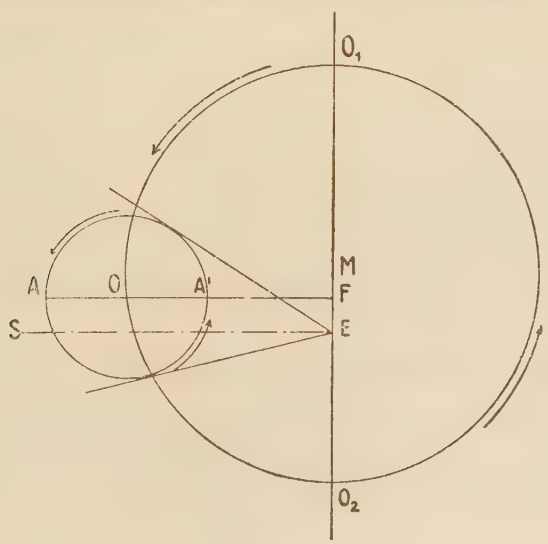

Fig. 14.

auf der Geraden O_1O_2 in der Weise erfolgen zu lassen, daß sich die Linie FO beständig parallel zu ES bewegt. Die Einführung dieser kreisförmigen um einen exzentrisch gelegenen Punkt mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit verlaufende Bewegung bietet in der Bestimmung des Abstandes EF ein Mittel dar, die Theorie so auszubauen, daß sie sich für die betrachteten Stellungen des Epizykels auf diejenigen Beobachtungen gründet, die sie wiedergeben soll.

Unter den angegebenen Voraussetzungen wird das Zentrum O im Apogäum O_1 von der Erde am weitesten entfernt und im Perigäum O_2 ihr am nächsten sein und daher die Summe der größten östlichen und westlichen Elongationen im ersten Falle ein Minimum, im zweiten ein Maximum werden. Dem entgegen beobachtet Ptolemaeus, daß in dem Bogenabstande von 120° zu beiden Seiten des Apogäums (Fig. 15) diese Summe größer ist als das Maximum, daß also in diesen beiden Stellungen der Epizykelmittelpunkt der Erde näher als der Punkt O_2 ist; um dies zu erklären, verkleinert er nunmehr den Radius des Deferenten und führt seinen Mittelpunkt M' (Eig. 16) in einem Kreise gleichmäßig aber im ent-

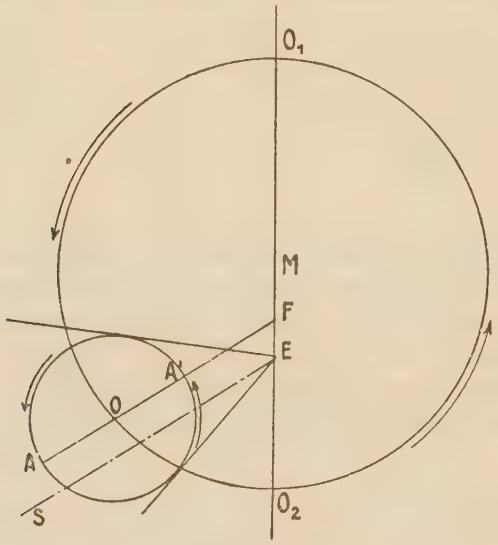

Fig. 15.

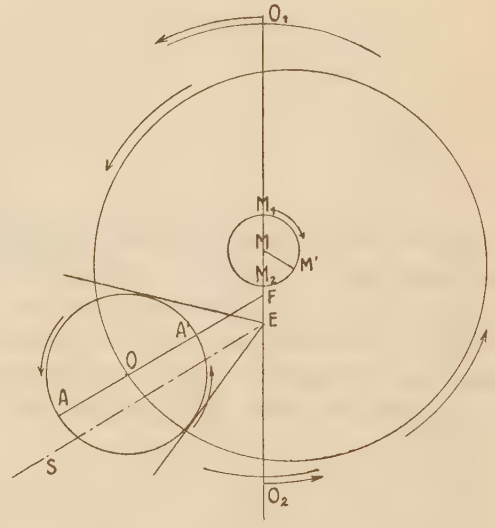

Fig. 16.

gegengesetzten Sinne um den Punkt M derart, daß allemal $\sphericalangle M_1MM' = \sphericalangle O_1ES$ und $MM' + M'O = MM_1 + M_1O = MM_2 + M_2O_2$ ist. Die Annahme eines beweglichen Deferenten ermöglicht es, nicht allein den Beobachtungen in der Linie O_1O_2 und in der zu ihr senkrechten Richtung gerecht zu werden, sondern auch in den beiden um 120° von dem Apogäum O_1 entfernten Stellungen des Epizykels.

Bestimmung der Bahnelemente des Mercurs.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen untersuchen wir im einzelnen, wie Ptolemaeus die numerischen Werte der Bahnelemente ermittelt und auf welche Weise er die mathematischen Methoden seiner Zeit auf die Mercurtheorie anwendet.

Es seien O' und O'' (Fig. 17) zwei in Bezug auf die Gerade O_1O_2 symmetrische Lagen des Epizykelzentrums, ES' und ES'' die Richtungen nach dem jeweiligen mittleren Sonnenorte und B' und B'' gegenüberliegende Orte größter Elongationen. Dann ist $\sphericalangle O_1ES' = \sphericalangle O_1ES''$ und $\sphericalangle S'EB' = \sphericalangle S''EB''$, und es folgt umgekehrt: Wenn in zwei Beobachtungen die größten Elongationen des Mercurs von seinem mittleren Orte entgegengesetzt gleich sind, so geht die Linie, welche den von den Richtungen nach den mittleren Orten gebildeten Winkel hälftet, entweder durch das Apogäum O_1 oder durch das Perigäum O_2. Diesen

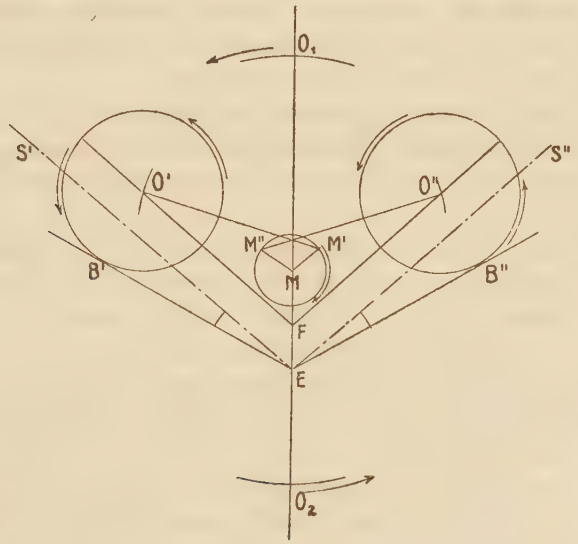

Fig. 17.

Satz benutzt nunmehr Ptolemaeus zur Bestimmung des Winkels, den die Gerade O_1O_2 mit der Richtung nach dem Frühjahrspunkt bildet. Da Beobachtungen der angegebenen Art selten sind, so wählt er diejenigen aus, welche die Lage des Apogäums zur Genüge erkennen lassen.

Im 16. Jahre Hadrians (879 Nabonassar), am Abend des 16. bis zum 17. Phamenoth = 2.—3. Februar + 132 (jul. Stil) wurde Mercur mit Hilfe des Astrolabiums in seiner größten Elongation vom mittleren Sonnenorte beobachtet und schien, verglichen mit Aldebaran, in Länge auf 1° Fische. Da aber zu jener Zeit der mittlere Sonnenort auf $9^1/_2{}^1/_4{}^0 = 9^3/_4{}^0$ Wassermann fiel, so war die größte westliche Elongation vom mittleren Orte $21^1/_4{}^0$.

Dieser Beobachtung wird die folgende an die Seite gesetzt:

Im 18. Jahre Hadrians (881 Nabonassar) am Morgen des 18. Epiphi bis zum 19. = 3.—4. Juni + 134 (jul. Stil) war Mercur in der größten Elongation vom mittleren Orte der Sonne und befand sich, verglichen mit Aldebaran, auf $18^1/_2{}^1/_4{}^0 = 18^3/_4{}^0$ Stier. Der mittlere Ort der Sonne war 10° Zwillinge und daher die größte östliche Elongation $21^1/_4{}^0$.

Da im ersten Falle der mittlere Sonnenort auf $9^3/_4{}^0$ Wassermann, im zweiten auf 10° Zwillinge fiel, so geht die Gerade O_1O_2 durch $10^0 - {}^1/_8{}^0 = 9^0 52' 30''$ Widder.

Ein zweites Paar von Beobachtungen ergibt nahezu dasselbe Resultat:

1. Jahr Antonin (885 Nabonassar), am Abend des 20. Epiphi bis zum 21. = 4.—5. Juni + 138; Mercur, bezogen auf Regulus: 7° Krebs; mittlerer Sonnenort: 10½° Zwillinge; größte westliche Elongation 26½°.

4. Jahr Antonin (888 Nabonassar), am Morgen des 18. Phamenoth bis zum 19. = 1.—2. Februar + 141. Mercur, bezogen auf Antares: 13½° Steinbock; mittlerer Sonnenort: 10° Wassermann; die größte östliche Elongation 26½°.

Hieraus folgt für die Richtung von $O_1 O_2$: 10° 15′ Wage. Als Mittelwert in seiner Zeit legt Ptolemaeus 10° Widder und 10° Wage zugrunde.

Um die Bewegung des Apogäums im Laufe der Jahrhunderte zu ermitteln, fügt Ptolemaeus 6 weitere Beobachtungen hinzu:

1. 23. Jahr, nach Denys, 29. Hydron, morgens = 17.—18. Choiac 486 (Nabonassar) = 11.—12. Februar − 261; wahrer Ort des Mercurs: 21⅓° Steinbock; mittlerer Sonnenort: 18⅙° Wassermann; größte östliche Elongation 25½⅓° = 25⅚°.

2. 23. Jahr, nach Denys, 4. Tauron, abends = 30. Phamenoth − 1. Pharmouthi 486 (Nabonassar) = 25. April − 261; wahrer Ort des Mercurs: 23⅔° Stier; mittlerer Sonnenort: 29½° Widder; größte westliche Elongation 24⅙°.

3. 28. Jahr, nach Denys, 7. Didymon, abends = 5.—6. Pharmouthi 491 (Nabonassar) = 28. bis 29. Mai − 256; wahrer Ort des Mercurs: 29⅓° Zwillinge; mittlerer Sonnenort: 2½⅓° = 2⅚° Zwillinge; größte westliche Elongation 26½°.

4. 24. Jahr, nach Denys, 28. Leonton, abends = 30. Payni 486 (Nabonassar) = 23. August − 261; wahrer Ort des Mercurs: 19½° Jungfrau; mittlerer Sonnenort: 27½⅓° = 27⅚° Löwe; größte westliche Elongation 21⅔°.

5. 75. Jahr der Chaldäer, 14. Dius morgens = 9. Thot 512 (Nabonassar) = 29. Oktober − 236; wahrer Ort des Mercurs 14⅙° Wage; mittlerer Sonnenort: 5⅙° Skorpion; größte östliche Elongation 21°.

6. 67. Jahr der Chaldäer, 5. Apellaios, morgens = 27.—28. Thot 504 (Nabonassar) = 18. November, − 244; wahrer Ort des Mercurs: 2⅓° Skorpion; mittlerer Sonnenort: 24½⅓° = 24⅚° Skorpion; größte Elongation: 22½°.

Delambre und Herz setzen in Übereinstimmung mit den Ptolemaeus-Ausgaben die letzte Beobachtung in das Jahr 564 (Nabonassar). Wenn aber das 75. Jahr der Chaldäer mit dem 512. Jahr (Nabonassar) zusammenfällt, so entspricht dem 67. Jahre der Chaldäer das Jahr 504 (Nabonassar). Die mittlere Bewegung der Sonne in 563 ägyptischen Jahren 26 Tagen 18 Stunden beträgt nach den Tafeln des Ptolomaeus 249° 29′, und dies gibt unter Berücksichtigung der Epoche 1 Thot des Jahres 1 (Nabonassar) 249° 29′ − 29° 15′ = 220° 14′ = 10° 14′ Skorpion als mittleren Sonnenort. In 503 Jahren 26 Tagen 18 Stunden ist die mittlere Bewegung 264° 5′ und demnach der mittlere Sonnenort 264° 5′ − 29° 15′ = 234° 50′ = 24⅙° Skorpion, wie es Ptolemaeus angibt. Die letzte Beobachtung fällt also in das Jahr 504, und daher ist der Vorwurf, daß sie entweder sehr fehlerhaft oder gefälscht ist, völlig unbegründet.

Unter den angegebenen sechs Beobachtungen finden sich keine, in denen die größten Elongationen des Mercurs von seinem mittleren Orte entgegengesetzt gleich sind und die unmittelbar die Lage des Apogäums um das Jahr 500 (Nabonassar) erkennen lassen. Ptolemaeus wendet daher eine Interpolation an, indem er voraussetzt, daß für benachbarte mittlere Orte die größten Elongationen sich im wesentlichen proportional ändern. Da in der ersten Beobachtung die größte östliche Elongation $25^5/_6{}^0$ beträgt, so liegt die gleiche westliche zwischen den Elongationen $24^1/_6{}^0$ und $26^1/_2{}^0$ der beiden folgenden Beobachtungen:

$24^1/_6{}^0$	entsprechen	$29^1/_2{}^0$	des Tierkreises.
$26^1/_2{}^0$	„	$62^5/_6{}^0$	„
$25^5/_6{}^0$	„	$29^1/_2{}^0 + 23^{17}/_{21}{}^0$	„

Den Bruch $^{17}/_{21}$ erhöht Ptolemaeus auf die Einheit und erhält für die größte westliche Elongation von $25^5/_6{}^0$ den mittleren Sonnenort $23^1/_2{}^0$ Stier; da aber die gleiche östliche bei dem mittleren Sonnenorte $18^1/_6{}^0$ Wassermann eintritt, so ergibt sich für die Richtung der Geraden $O_1 O_2$ $5^5/_6{}^0$ Widder.

Aus der 5. und 6. Beobachtung folgt:

21^0	entsprechen	$5^1/_6{}^0$	Skorpion.
$22^1/_2{}^0$	„	$24^5/_6{}^0$	„
$21^2/_3{}^0$	„	$5^1/_6{}^0 + 8^{20}/_{27}{}^0$	„

Um die ohnehin nur genähert richtige Interpolation zu vereinfachen, nimmt Ptolemaeus als Inkrement 9^0 und findet für den gesuchten mittleren Sonnenort $14^1/_6{}^0$ Skorpion und demnach für die Richtung $O_1 O_2$: $^1/_2 (224^1/_6{}^0 - 147^5/_6{}^0) \equiv 6^0$ Wage. Um das Jahr 500 (Nabonassar) ist der Durchmesser $O_1 O_2$ nach 6^0 Wage und um das Jahr 900 (Nabonassar) nach 10^0 Wage gerichtet; somit ist die Bewegung des Apogäums in 100 Jahren 1^0 im Sinne der Zeichen.

Die Größe des Epizykelradius r und der Exzentrizität e ermittelt Ptolemaeus aus 2 Beobachtungen seiner Zeit, in denen der mittlere Sonnenort nahezu in die Richtung der Symmetrieachse $O_1 O_2$ auf 10^0 Wage und Widder fällt:

1. 19. Jahr Hadrian (882 Nabonassar), 14.—15. Athyr, morgens = 2.—3. Oktober + 134; wahrer Ort des Mercurs, verglichen mit Regulus: $20^1/_5{}^0$ Jungfrau; mittlerer Sonnenort: $9^1/_4{}^0$ Wage; größte östliche Elongation $19^1/_{20}{}^0$.

2. 19. Jahr Hadrian (882 Nabonassar), 19. Pachon, abends = 5. April + 134; wahrer Ort des Mercurs, verglichen mit Aldebaran: $4^1/_3{}^0$ Stier, mittlerer Sonnenort: $11^1/_{12}{}^0$ Widder; größte westliche Elongation $23^1/_4{}^0$.

Es sei E der Mittelpunkt der Erde (Fig. 18), O_1 das Apogäum auf 10^0 Wage, O_2 das Perigäum auf 10^0 Widder, und um M bewege sich der Mittelpunkt des Deferenten

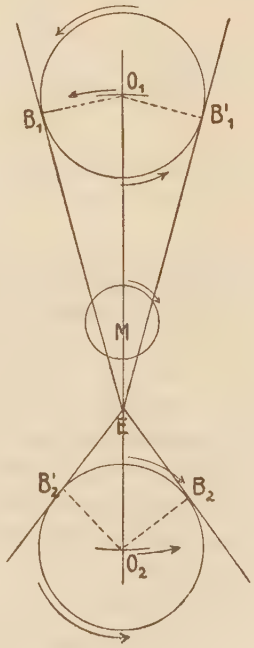

Fig. 18.

kreisförmig. Zieht man von E an die Epizykel um O_1 und O_2 die Tangenten EB_1' und EB_2, so hat man:

$$\sphericalangle O_1 E B_1' = 19^0\,3'.$$

Beschreibt man über $O_1 E = 120^p$ als Durchmesser den Kreis, so ist der zu der Sehne $O_1 B_1'$ gehörige Zentriwinkel $38^0\,6'$ und daher nach den ptolemaeischen Sehnentafeln $O_1 B_1' = 39^p 10'\,1''$, während Ptolemaeus für die weiteren Rechnungen den Epizykelradius $r = 39^p\,9'$ annimmt. Aus der zweiten Beobachtung ergibt sich

$$\sphericalangle O_2 E B_2 = 23^0\,15'$$

und demnach $O_2 B_2 = 47^p 22'\,9''$, oder nach Ptolemaeus $O_2 B_2 = 47^p 22'$ der Teile, von denen $O_2 E$ 120 enthält. Da nunmehr $O_1 B_1' = O_2 B_2$ ist, so folgt, bezogen auf die zuerst zugrunde gelegten Einheiten:

$$O_2 E = \frac{39^p\,9'}{47^p\,22'} \cdot 120^p = 99^p\,11'\,1'',$$

nach Ptolemaeus $O_2 E = 99^p\,9'$; mithin erhält man:

$$O_1 E = 120^p; \quad r = 39^p\,9'; \quad EO_2 = 99^p\,9'; \quad O_1 O_2 = O_1 E + EO_2 = 219^p\,9';$$

$$O_1 M = MO_2 = 109^p\,34'; \quad e = ME = MO_2 - O_2 E = 10^p\,25'.$$

Vergleicht man diese Werte mit den exakten:

$$O_1 E = 120^p; \quad r = 120^p \sin 19^0\,3' = 39^p{,}16718 = 39^p\,10'\,1{,}8'';$$

$$EO_2 = EO_1 \cdot \frac{\sin 19^0\,3'}{\sin 23^0\,15'} = 99^p{,}22175 = 99^p\,13'\,18{,}3'';$$

$$O_1 O_2 = 219^p{,}2218 = 219^0\,13'\,18{,}3''; \qquad O_1 M = 109^p{,}61088 = 109^p\,36'\,39{,}2'';$$

$$e = 10^p{,}38913 = 10^p\,23'\,20{,}9'',$$

so übersteigen die Abweichungen nicht $4^1/_2'$, sind also von derselben Ordnung wie die Beobachtungsfehler.

Um den Punkt der Geraden $O_1 O_2$ zu bestimmen, um den die gleichförmige Bewegung des Epizykelzentrums im Sinne der Zeichen stattfindet, bedient sich Ptolemaeus zweier Beobachtungen größter Elongationen, für welche der mittlere Sonnenort um 270^0 vom Apogäum entfernt ist und auf 10^0 Krebs fällt:

1. 14. Jahr Hadrian (877 Nabonassar), 18. Mesore, abends = 4. Juli +130; wahrer Ort des Mercurs, bezogen auf Regulus: $6^1/_3{}^0$ Löwe; mittlerer Sonnenort: $10^1/_{12}{}^0$ Krebs; größte westliche Elongation $26^1/_4{}^0$.

2. 2. Jahr Antonin (886 Nabonassar) 24. Mesore, abends = 8. Juli +139; wahrer Ort des Mercurs, bezogen auf Aldebaran: $20^1/_{12}{}^0$ Zwillinge; mittlerer

Sonnenort: $10^1/_3{}^0$ Krebs; größte östliche Elongation $20^1/_4{}^0$.

Es sei wieder $O_1 O_2$ die Symmetrielinie der Bahn für die Bewegung in Länge (Fig. 19), welche nach 10^0 Wage und Widder zeigt, E der Mittelpunkt der Erde, F der punctum aequans und M' der Mittelpunkt des Deferenten für den mittleren Ort 10^0 Krebs. Dann ist, im Sinne der Drehungen erstreckt:

$$\sphericalangle O_1 ES = \sphericalangle O_1 FO = \sphericalangle M_1 MM' = 270^0$$

und nach den Beobachtungen:

$\sphericalangle SEB = 26^1/_4{}^0 \quad \sphericalangle SEB' = 20^1/_4{}^0$.

Mit Hilfe der beiden letzten Werte findet man $\sphericalangle OEB' = 23^1/_4{}^0$,

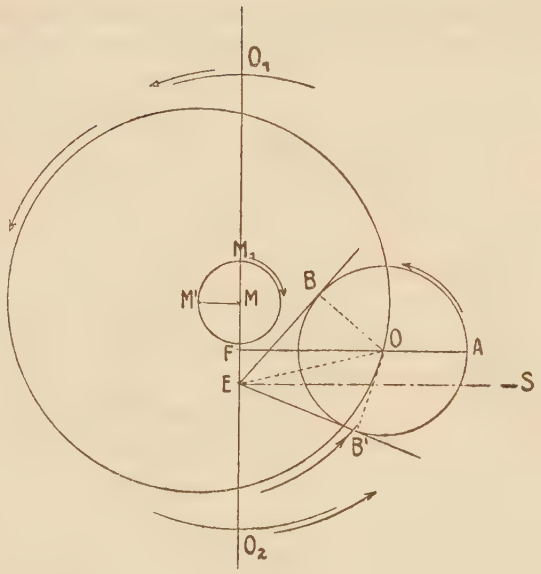

Fig. 19.

$$\sphericalangle EOF = \sphericalangle OES = \sphericalangle OEB' - \sphericalangle SEB' = 3^0,$$

und es folgt aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken OEB' und OEF unter Benutzung der Sehnentafel:

$$OE = 120^p \quad OB' = 47^p 22' 9'' \quad EF = 6^p 16' 49''.$$

Wenn man die Teile in dem Maßstabe: $39^p 9' : 47^p 22'$ verkleinert und sich auf die Minuten beschränkt, so ergeben sich die Werte: $OE = 99^p 11'$; $OB' = 39^p 9'$; $EF = 5^p 12'$, und nach Ptolemaeus:

$$OE = 99^p 9' \quad OB' = 39^p 9' \quad EF = 5^p 12'.$$

Da in denselben Einheiten $ME = 10^p 25'$ enthält, so liegt der Punkt F, um welchen die gleichförmige jährliche Bewegung des Epizykelzentrums im Sinne der Zeichen erfolgt, in der Mitte von ME. Wendet man die trigonometrischen Funktionen unter Zugrundelegung der genauen Werte an, so hat man:

$$OB' = OE \sin 23^1/_4{}^0 \qquad EF = OE \sin 3^0$$

$$EF = OB' \frac{\sin 3^0}{\sin 23^1/_4{}^0} = 39^p{,}16718 \cdot \frac{\sin 3^0}{\sin 23^1/_4{}^0} = 5^p{,}19286 = 5^p 11' 34''.$$

Dieser Wert stimmt mit dem von Ptolemäus berechneten überein.

Man verlängere MM' über M' hinaus bis zum Schnittpunkte N mit dem Deferenten (Fig. 20). Dann ist nach dem Vorangehenden in den Teilen, in denen $r = 39^p 9'$ enthält:

$$MN = MO_1 = 109^p 34'; \quad MO = OE = 99^p 9'.$$

Zur Berechnung des Radius ϱ des Kreises, den der Mittelpunkt M' des Deferenten

in einem Jahre gegen die Ordnung der Zeichen umläuft, betrachtet Ptolemaeus die gebrochene Linie OMN als gerade und erhält:

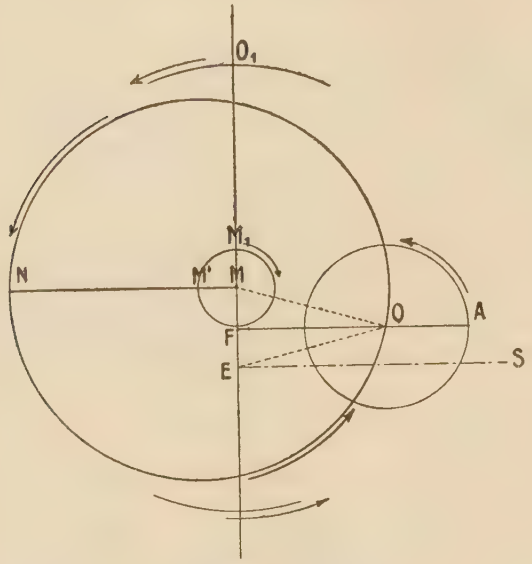

Fig. 20.

$$NO = NM + MO = 208^r 43'$$
$$NM' = \tfrac{1}{2} NO = R = 104^r 22'$$
$$MM' = \varrho = MN - NM' = 5^r 12'.$$

Nun ist in denselben Teilen $MF = 5^r 12'$, $FE = 5^r 12'$, und daher liegt F auf dem Kreise mit dem Halbmesser ϱ, oder wenn sich das Epizykelzentrum auf 10° Widder befindet, fällt der Mittelpunkt M' des Deferenten mit dem punctum aequans zusammen.

Die Annahme, daß M, N, O in einer Geraden liegen, führt eine erhebliche Vereinfachung der Rechnung herbei. Da

$$\sphericalangle EMO = \sphericalangle MEO = 90^\circ - \sphericalangle OES = 87^\circ$$

ist, so sind die beiden Linien MN und MO um 3° gegeneinander geneigt. Denkt man sich N und O durch eine Gerade verbunden und in dem entstandenen Dreiecke MNO: $MN = a$, $MO = b$, $\sphericalangle MON = \alpha$, $\sphericalangle MNO = \beta$ gesetzt, so hat man

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b + a \cos 3^\circ}{a \sin 3^\circ}, \qquad \beta = 3^\circ - \alpha$$

$$\varrho = \frac{a \cos \beta - b \cos \alpha}{2 \cos \beta}$$

und unter Anwendung der genauen Werte: $a = 109^r, 61088$ $b = 99^r, 22175$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{,}0398535 \\
\log \cos 3^\circ &= \underline{9{,}999404 - 10} \\
\log a \cos 3^\circ &= 2{,}0392575 \\
a \cos 3^\circ &= 109{,}46063 \\
b + a \cos 3^\circ &= 208{,}68238 \\
\log (b + a \cos 3^\circ) &= 2{,}3194860 \\
\log a \sin 3^\circ &= \underline{0{,}7586535}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{cotg} \alpha &= 1{,}5608325 \\
\alpha &= 1^\circ 34' 28'',7 \\
\beta &= 1^\circ 25' 31'',3 \\
\log a \cos \beta &= 2{,}0397195 \\
a \cos \beta &= 109{,}5771 \\
\log b \cos \alpha &= 1{,}996443 \\
b \cos \alpha &= 99^p{,}18425 \\
a \cos \beta - b \cos \alpha &= 10{,}39285 \\
\log (a \cos \beta - b \cos \alpha) &= 1{,}0167347 \\
\log \cos \beta &= \underline{9{,}999866} \\
2\varrho &= 10^p{,}39606 \\
\varrho &= 5^p{,}19803 \\
\varrho &= 5^p\, 11'\, 52'',9.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich des erhaltenen Resultats mit dem von Ptolemaeus ermittelten Werte zeigt zur Genüge, daß die Voraussetzung, die gebrochene Linie *NMO* als gerade anzunehmen, vollkommen berechtigt ist.

Für die Radien ergeben sich die Werte:

$$R = 104^p 22' \qquad r = 39^p 9' \qquad \varrho = 5^p 12'$$

oder wenn man die Teile in dem Verhältnis $60^p : 104^p 22'$ verkleinert:

$$\begin{aligned}
R &= 60^p \\
r &= 22\tfrac{1}{2}{}^p \\
\varrho &= 3^p,
\end{aligned}$$

während die exakten Werte sind:

$$R = 60^p \qquad r = 22^p{,}50633 \qquad \varrho = 2^p{,}98690.$$

Der bewegliche Deferent, den Ptolemaeus zur Erklärung der Bewegung in Länge einführt, hat nicht allein die Aufgabe, die Theorie so zu verfeinern, daß sie die größten Elongationen des Mercurs von dem mittleren Sonnenorte 10° Krebs und 10° Steinbock exakt darstellt, sondern er soll auch für die Stellungen 120° vom Apogäum O_1 den Epizykel der Erde näher bringen als es für den mittleren Ort 10° Widder der Fall ist. Aus den Beobachtungen, die Ptolemaeus zur Richtungsbestimmung der Symmetrieachse $O_1 O_2$ zu seiner Zeit verwendet, erkennt man, daß 120° vom Apogäum auf 10° Wassermann und 10° Zwillinge der Epizykel, von der Erde aus gesehen, unter einem Winkel von $47\frac{3}{4}{}^\circ$ erscheint. Angenommen es sei (Fig. 21):

$$\sphericalangle O_1 ES = \sphericalangle O_1 FO = \sphericalangle M_1 MM' = 240^\circ$$

$$R = 60^p \qquad r = 22\tfrac{1}{2}{}^p \qquad \varrho = 3^p.$$

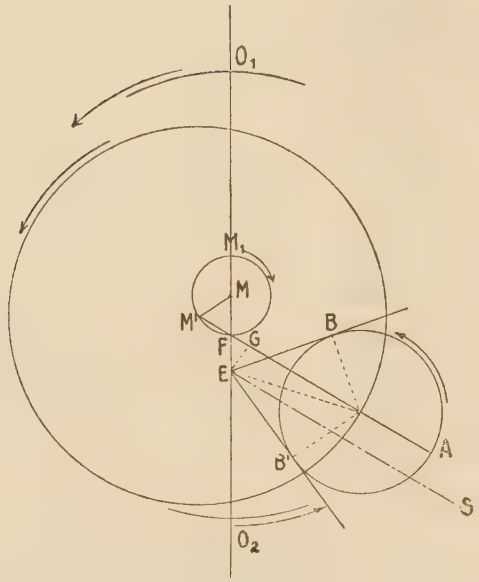

Fig. 21.

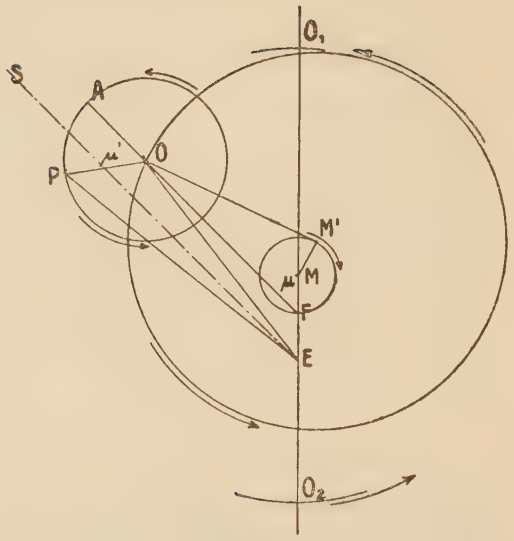

Fig. 22.

Da $\sphericalangle MFM' = \sphericalangle OFE = 60^\circ$ ist, so liegen die Punkte M', F, O in gerader Linie, und es folgt, wenn man von E auf $M'O$ das Perpendikel EG fällt:

$$M'O = 60^p \qquad M'F = 3^p \qquad FO = 57^p$$
$$FG = 1^p 30' \qquad EG = 2^p 36' \qquad OG = 55^p 30'$$
$$OE = 55^p 34' \qquad OB = 22^p 30' \qquad \sphericalangle BOB' = 47^\circ 46'.$$

Der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung beläuft sich auf 1'.

Berechnung des Standortes des Mercurs zu gegebener Zeit.

Die fundamentale Aufgabe, welche für die Anwendung der Theorie in Betracht kommt, besteht darin, den wahren Ort des Mercurs in Länge zu bestimmen, wenn die Entfernung μ des mittleren Sonnenortes von der Symmetrielinie O_1O_2 sowie auch die Größe der Anomalie μ', gezählt von dem in der Richtung OF liegenden augenblicklichen Apogäum A des Epizykels, gegeben sind. Betrachten wir das Problem allgemein unter Benutzung der trigonometrischen Methoden. Ist (Fig. 22)

$$\sphericalangle O_1ES = \sphericalangle O_1FO = \sphericalangle O_1MM' = \mu$$
$$\sphericalangle AOP = \mu'$$

und mithin $\sphericalangle O_1FM' = \frac{\mu}{2}$, $\sphericalangle M'FO = \frac{3\mu}{2}$, so hat man:

$$M'F = 2\varrho \cos \frac{\mu}{2}$$

$$\sin M'OF = \frac{2\varrho}{R} \cos \frac{\mu}{2} \sin \frac{3\mu}{2}$$

$$OF = R \frac{\sin\left(\frac{3\mu}{2} + \measuredangle M'OF\right)}{\sin \frac{3\mu}{2}}$$

Es sei α der Winkel, um welchen der Epizykelmittelpunkt O, von E aus gesehen, gegen die Symmetrielinie geneigt ist. Dann folgen die Gleichungen:

$$OE \cos \alpha = OF \cos \mu + \varrho$$
$$OE \sin \alpha = OF \sin \mu,$$

die zur Berechnung von OE und α dienen. Für den wahren Ort β des Mercurs in Länge, gezählt von der Symmetrielinie, ergibt sich:

$$PE \cos \beta = OE \cos \alpha + r \cos (\mu + \mu')$$
$$PE \sin \beta = OE \sin \alpha + r \sin (\mu + \mu').$$

Da $\measuredangle OPE = \mu + \mu' - \beta$ ist, so erscheint Mercur in der größten westlichen Elongation, wenn $\mu + \mu' - \beta = 90°$ und in der größten östlichen Elongation, wenn $\mu + \mu' - \beta = 270°$ ist.

Da die Epoche für die mittlere zodiakale Bewegung des Mercurs mit der des mittleren Sonnenortes identisch ist, so läßt sich zu einer vorgeschriebenen Zeit der Ort des Planeten in Länge unmittelbar auffinden, wenn noch eine Epoche für die anomalistische Bewegung bekannt ist. Um diese zu bestimmen und gleichzeitig die mittlere anomalistische Geschwindigkeit, wie sie Hipparch angegeben hat, zu verbessern, verwendet Ptolemaeus zwei Beobachtungen, von denen die erste seiner Sammlung angehört, während die zweite überliefert ist:

1. Im 2. Jahre Antonin (886 Nabonassar), in der Nacht vom 2. zum 3. Epiphi, $4^1/_2$ Äquinoktialstunden vor Mitternacht = 17.—18. Mai +139 befand sich der Mercur vor seiner größten westlichen Elongation, verglichen mit Regulus und dem Mittelpunkte des Mondes, auf $17^1/_2{}^0$ Zwillinge. Der mittlere Sonnenort war für die angegebene Stunde nach den Tafeln 22° 34′ Stier.

2. Im 21. Jahre, nach Denys, am 22. Skorpius = 18.—19. Thot 484 (Nabonassar) = 14.—15. November − 264 war Mercur vor seiner größten östlichen Elongation auf $3^1/_3{}^0$ Skorpion. Der mittlere Sonnenort war am Morgen des 19. Thot 6 Äquinoktialstunden nach den Tafeln $20^1/_2{}^1/_3{}^0 = 20^5/_6{}^0$ Skorpion.

Da zur Zeit der ersten Beobachtung die Symmetrieachse O_1O_2 auf 10° Wage, zu der der zweiten auf 6° Wage fällt, so ist im ersten Falle:

$$\mu = 222° 34' \qquad \beta = 247° 30'$$

und im zweiten:

$$\mu = 44^\circ 50' \qquad \beta = 27^\circ 20'.$$

Zur Berechnung der Anomalie μ' bei gegebenem μ und β multipliziere man die linken und rechten Seiten der Gleichungen:

$$PE \cos \beta = OE \cos a + r \cos (\mu + \mu')$$
$$PE \sin \beta = OE \sin \alpha + r \sin (\mu + \mu')$$

der Reihe nach mit $\sin \beta$ und $\cos \beta$ und subtrahiere. Dann folgt:

$$r \sin (\mu + \mu' - \beta) = OE \sin (\beta - \alpha)$$

oder

$$r \sin (\mu + \mu' - \beta) = OF \sin (\beta - \mu) + \varrho \sin \beta.$$

Hieraus ergeben sich für $\mu + \mu' - \beta$ zwei Werte; der eine Wert bezieht sich auf die Stellung des Mercurs vor der größten Elongation, der andere auf die nach der größten Elongation.

Man führe für die erste Beobachtung die Rechnung aus und nehme

$$R = 60^p \qquad r = 22^1/_2{}^p \qquad \varrho = 3^p.$$

Es ist

$$\sin M'OF = \frac{2\varrho}{R} \cos \frac{\mu}{2} \sin \frac{3\mu}{2}$$

$$OF = R \frac{\sin \left(\frac{3\mu}{2} + \sphericalangle M'OF \right)}{\sin \frac{3\mu}{2}}$$

$$\frac{\mu}{2} = 180^\circ - 68^\circ 43'$$

$$\frac{3\mu}{2} = 360^\circ - 26^\circ 9'$$

$$\frac{2\varrho}{R} = 0{,}1$$

$$\log \left(- \cos \frac{\mu}{2} \right) = 9{,}559883 - 10$$

$$\log \left(- \sin \frac{3\mu}{2} \right) = 9{,}644165 - 10$$

$$\log \frac{2\varrho}{R} = \underline{0{,}000000 - 1}$$

$$\log \sin M'OF = 8{,}204048 - 10$$

$$\sphericalangle M'OF = 0^\circ 54' 59'',3$$

$$\frac{3\mu}{2} + \sphericalangle M'OF = 360^\circ - 25^\circ\,14'\,0{,}7''$$

$$\log\left(-\sin\left(\frac{3\mu}{2} + \sphericalangle M'OF\right)\right) = 9{,}629724 - 10$$

$$\log R = 1{,}778151$$

$$\log\left(-OF\sin\frac{3\mu}{2}\right) = 1{,}407875$$

$$\log\left(-\sin\frac{3\mu}{2}\right) = 9{,}644165 - 10$$

$$\log OF = 1{,}763710$$

$$\log\sin(\beta-\mu) = 9{,}624863$$

$$\log OF\sin(\beta-\mu) = 1{,}388573$$

$$OF\sin(\beta-\mu) = 24^r{,}4666$$

$$\log\varrho = 0{,}477121$$

$$\log(-\sin\beta) = 9{,}965615 - 10$$

$$\log(-\varrho\sin\beta) = 0{,}442736$$

$$-\varrho\sin\beta = 2^r{,}7716$$

$$\log r\sin(\mu+\mu'-\beta) = 1{,}336360$$

$$\log r = 1{,}352183$$

$$\log\sin(\mu+\mu'-\beta) = 9{,}984177 - 10$$

$$\mu+\mu'-\beta = 74^\circ\,37'\,38''{,}3$$

$$\beta-\mu = 24^\circ\,56'$$

$$\mu' = 99^\circ\,33'\,38''{,}3.$$

Dieselbe Rechnung stellt Ptolemaeus ohne Zuhilfenahme trigonometrischer Funktionen auf und erhält $\mu' = 99^\circ\,27'$. Die Abweichung von nahezu 7′ erklärt sich bis auf eine kleine Ungenauigkeit daraus, daß Ptolemaeus Sekunden nicht berücksichtigt, daß er für jedes der sechs rechtwinkligen Dreiecke, welche er successive berechnet, die Einheiten der Maßzahlen der Seiten wechselt und daß er mehrmals aus der Summe der Quadrate zweier Sexagesimalzahlen die zweite Wurzel zieht. Herz findet $\mu' = 99^\circ\,53'$ und einen Unterschied von 26′ gegenüber Ptolemaeus; wie es scheint, beruht dies indessen auf einem Versehen von Herz, denn wenn man auch die genauen Werte von R, r, ϱ zugrunde legt, so erhält man nur $99^\circ\,39'$.

Für die zweite Beobachtung hat man:

$$\mu = 44^\circ 50' \qquad \beta = 27^\circ 20'$$

$$\frac{\mu}{2} = 22^\circ 25' \qquad \frac{3\mu}{2} = 67^\circ 15'$$

$$\log \cos \frac{\mu}{2} = 9{,}965876 - 10$$

$$\log \sin \frac{3\mu}{2} = 9{,}964826 - 10$$

$$\log \frac{2\varrho}{R} = \underline{0{,}000000 - 1}$$

$$\log \sin M'OF = 8{,}930702 - 10$$

$$\measuredangle M'OF = 4^\circ 53' 25'',8$$

$$\frac{3\mu}{2} + \measuredangle M'OF = 72^\circ\ 8' 25'',8$$

$$\log \sin \left(\frac{3\mu}{2} + \measuredangle M'OF \right) = 9{,}978551 - 10$$

$$\log R = \underline{1{,}778151}$$

$$\log OF \sin \frac{3\mu}{2} = 1{,}756702$$

$$\log \sin \frac{3\mu}{2} = \underline{9{,}964826 - 10}$$

$$\log OF = 1{,}791876$$

$$\log (-\sin (\beta - \mu)) = \underline{9{,}478142 - 10}$$

$$\log (-OF \sin (\beta - \mu)) = 1{,}270018$$

$$-OF \sin (\beta - \mu) = 18^r{,}6217$$

$$\log \varrho = 0{,}477121$$

$$\log \sin \beta = \underline{9{,}661970 - 10}$$

$$\log \varrho \sin \beta = 0{,}139091$$

$$\varrho \sin \beta = 1^r{,}3775$$

$$r \sin (\mu + \mu' - \beta) = -17^r{,}2442$$

$$\log (-r \sin (\mu + \mu' - \beta)) = 1{,}236643$$

$$\log r = \underline{1{,}352183}$$

$$\log (-\sin (\mu + \mu' - \beta)) = 9{,}884460 - 10.$$

Da der Mercur vor der größten östlichen Elongation sich befand, so ist

$$\mu + \mu' - \beta - 180^\circ = 50^\circ\ 1'\,56'',7$$
$$\mu + \mu' - \beta = 230^\circ\ 1'\,56'',7$$
$$\mu - \beta = 17^\circ\,15'$$
$$\mu' = 212^\circ\,31'\,56'',7.$$

Ptolemaeus findet $\mu' = 212^\circ 34'$.

Da die Differenz zwischen den Beobachtungszeiten 402 ägyptische Jahre, 283 Tage, 13½ Äquinoctialstunden beträgt und Mercur in 20 Jahren nahezu 63 und mithin in 400 Jahren nahezu 1260 Umläufe der Anomalie ausführt, so ergibt sich nach Hinzunahme der 8 Umläufe, welche die beiden anderen Jahre und die Tage umfassen, daß in dieser Zeit 1268 Restitutionen der Anomalie $+246^\circ 53'$ stattfinden. Auf Grund dieser Berechnung verbessert Ptolemaeus die von Hipparch überlieferte mittlere anomalistische Bewegung.

Zur Bestimmung der Größe der Anomalie am 1. Thot des Jahres 1 (Nabonassar) geht Ptolemaeus auf die Beobachtung aus dem Jahre 484 (Nabonassar) zurück. Das Intervall zwischen dieser und der Epoche beträgt 483 ägyptische Jahre 17 Tage 18 Stunden, in welcher Zeit sich der Überschuß der mittleren anomalistischen Bewegung über die ganzen Vielfachen von 360° auf $190^\circ 39'$ beläuft. Wenn man diese $190^\circ 39'$ von $212^\circ 34'$ subtrahiert, so erhält man für die Anomalie am 1. Thot des Jahres 1 (Nabonassar) um Mittag $\mu_0' = 21^\circ 55'$. Ferner ist für diese Epoche $\mu_0 = 0^\circ 45'$ Fische und die Richtung der Symmetrieachse $\pi_0 = 1^\circ 10'$ Wage, und man hat daher:

$$\mu = \mu_0 + \omega t - \pi_0 - \pi t$$
$$\mu' = \mu_0' + \omega' t,$$

wenn π die Geschwindigkeit der Drehung des Apogäums des Deferenten (1° in 100 Jahren) bezeichnet. Die Größen ωt und $\omega' t$ ergeben sich nach Abtrennung der vollen Umläufe aus den Tafeln über die mittlere zodiakale und anomalistische Bewegung für einen Zeitraum von 18 ägyptischen Jahren, einem Jahre, einem Monat, einem Tage und einer Stunde, und mit ihrer Hilfe lassen sich μ und μ' leicht für jede Beobachtungszeit angeben.

Um aus dem so erhaltenen mittleren Orte des Mercurs den wahren zu finden, dient eine Tafel, die in 8 Spalten eingeteilt ist und von denen die beiden ersteren das Argument und die beiden folgenden vereinigt die Differenz $\mu - \alpha$ enthalten. Die Spalte 3 ist berechnet unter der Voraussetzung, daß das Epizykelzentrum sich auf dem um den Punkt der gleichmäßigen Winkelbewegung mit der mittleren Entfernung $R = 60^p$ als Halbmesser beschriebenen Kreise bewegt, während die Spalte 4 das Korrektionsglied angibt, welches dadurch bedingt ist, daß das Zentrum diesen Kreis nicht umläuft.

Es sei $\vartheta = \beta - \alpha$ (Fig. 23, S. 30) die von der Erde betrachtete Elongation des Mercurs von dem Epizykelzentrum O in einer beliebigen Entfernung vom

Apogäum des Deferenten und ϑ' die zugehörige größte Elongation, worin ϑ und ϑ' dasselbe Vorzeichen haben und entweder potitiv oder negativ sind, jenachdem die Elongation westlich oder östlich von O erfolgt. Bezogen auf das von der Erde gesehene scheinbare Apogäum C des Epizykels ist $\sphericalangle COP = \mu + \mu' - \alpha$

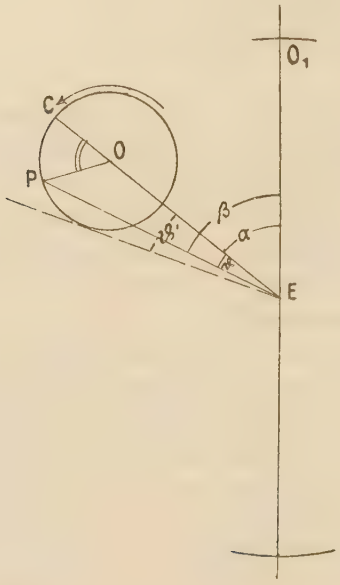

Fig. 23.

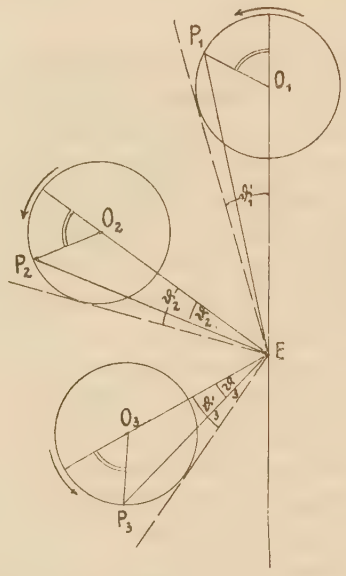

Fig. 24.

und demnach

$$PE\cos\vartheta = r\cos(\mu+\mu'-\alpha)+OE$$
$$PE\sin\vartheta = r\sin(\mu+\mu'-\alpha)$$
$$OE\sin\vartheta' = r.$$

Wenn man $\mu+\mu'-\alpha$ als konstant ansieht, so ist ϑ Funktion von OE und um so kleiner, je größer OE ist. Man bezeichne (Fig. 24) mit ϑ_1 den kleinsten Wert für $OE = O_1E$, mit ϑ_2 den mittleren Wert für $OE = R = 60^r$, mit ϑ_3 den größten Wert für das Minimum O_3E von OE, welches nahezu in einem Abstande von 120° von dem Apogäum stattfindet. Sind ferner ϑ_1', ϑ_2', ϑ_3' die Werte in Bezug auf die größten Elongationen, so hat man:

$$P_1E\cos\vartheta_1 = r\cos(\mu+\mu'-\alpha)+O_1E$$
$$P_1E\sin\vartheta_1 = r\sin(\mu+\mu'-\alpha)$$
$$O_1E\sin\vartheta_1' = r$$
$$P_2E\cos\vartheta_2 = r\cos(\mu+\mu'-\alpha)+R$$

Tafel für die Bewegung des Mercurs in Länge.

1.	2.	3. $\mu-\alpha$	4.	5.	6.	7.	8.
Arg.		Hauptwert	Korrektion	$\vartheta_2-\vartheta_1$	ϑ_2	$\vartheta_3-\vartheta_2$	λ
6°	354°	0° 18′	−0° 1′	0° 10′	1° 38′	0° 5′	−59′ 20″
12	348	0 34	−0 2	0 20	3 16	0 11	−57 20
18	342	0 51	−0 4	0 29	4 53	0 17	−54 40
24	336	1 7	−0 5	0 39	6 29	0 23	−50 40
30	330	1 22	−0 5	0 49	8 4	0 28	−45 40
36	324	1 37	−0 4	0 59	9 36	0 34	−39 40
42	318	1 51	−0 4	0 8	11 6	0 40	−33 0
48	312	2 4	−0 3	1 18	12 33	0 45	−25 40
54	306	2 15	−0 1	1 28	13 58	0 50	−18 0
60	300	2 25	+0 0	1 39	15 18	0 56	−10 20
66	294	2 34	+0 2	1 49	16 33	1 4	−2 20
72	288	2 41	+0 4	1 59	17 43	1 11	+9 14
78	282	2 46	+0 6	1 9	18 47	1 17	+20 0
84	276	2 50	+0 7	2 19	19 44	1 23	+29 44
90	270	2 52	+0 9	2 25	20 33	1 29	+39 28
93	267	2 52	+0 10	2 34	20 54	1 32	+43 31
96	264	2 52	+0 10	2 39	21 13	1 35	+47 34
99	261	2 51	+0 11	2 44	21 25	1 38	+50 0
102	258	2 50	+0 10	2 48	21 45	1 41	+52 26
105	255	2 48	+0 10	2 53	21 52	1 44	+54 52
108	252	2 46	+0 10	2 58	21 59	1 46	+57 18
111	249	2 44	+0 9	3 2	22 2	1 49	+58 23
114	246	2 41	+0 9	3 4	22 1	1 52	+59 28
117	243	2 37	+0 9	3 6	21 56	1 55	+59 44
120	240	2 33	+0 8	3 8	21 47	1 57	+60 0
123	237	2 28	+0 7	3 9	21 33	1 59	+59 44
126	234	2 23	+0 7	3 10	21 13	2 0	+59 23
129	231	2 18	+0 6	3 12	20 53	2 0	+58 39
132	228	2 12	+0 6	3 12	20 25	2 1	+56 50
135	225	2 6	+0 5	3 9	19 50	2 1	+56 46
138	222	2 0	+0 4	3 6	19 10	2 0	+55 41
141	219	1 53	+0 4	3 2	18 24	2 0	+54 3
144	216	1 46	+0 3	2 57	17 12	1 58	+52 26
147	213	1 38	+0 3	2 51	16 35	1 53	+50 48
150	210	1 30	+0 2	2 42	15 31	1 47	+49 11
153	207	1 22	+0 2	2 32	14 20	1 41	+47 34
156	204	1 13	+0 2	2 21	13 3	1 34	+45 57
159	201	1 5	+0 1	1 9	11 41	1 26	+44 36
162	198	0 56	+0 1	1 55	10 13	1 17	+43 15
165	195	0 47	+0 1	1 38	8 40	1 7	+42 26
168	192	0 38	+0 0	1 19	7 1	0 56	+41 37
171	189	0 28	+0 0	1 1	5 19	0 43	+40 48
174	186	0 19	+0 0	0 42	3 35	0 24	+40 0
177	183	0 9	+0 0	0 21	1 48	0 14	+39 44
180	180	0 0	+0 0	0 0	0 0	0 0	+39 28

$$\begin{aligned} P_2 E \sin \vartheta_2 &= r \sin (\mu + \mu' - \alpha) \\ R \sin \vartheta_2' &= r \\ P_3 E \cos \vartheta_3 &= r \cos (\mu + \mu' - \alpha) + O_3 E \\ P_3 E \sin \vartheta_3 &= r \sin (\mu + \mu' - \alpha) \\ O_3 E \sin \vartheta_3' &= r. \end{aligned}$$

Angenommen, es sei nunmehr:

1) $\vartheta' \leqq \vartheta_2'$, dann geht Ptolemaeus von der Proportion

$$\frac{\vartheta_2 - \vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{\vartheta_2' - \vartheta'}{\vartheta_2' - \vartheta_1'}$$

aus und erhält $\vartheta = \vartheta_2 + \lambda (\vartheta_2 - \vartheta_1)$, wenn man

$$\lambda = - \frac{\vartheta_2' - \vartheta'}{\vartheta_2' - \vartheta_1'}$$

setzt. Ist aber

2) $\vartheta' \geqq \vartheta_2'$, so ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_3 - \vartheta_2} = \frac{\vartheta' - \vartheta_2'}{\vartheta_3' - \vartheta_2'}$$

$$\vartheta = \vartheta_2 + \lambda (\vartheta_3 - \vartheta_2),$$

wenn λ für diesen Fall definiert ist durch

$$\lambda = \frac{\vartheta' - \vartheta_2'}{\vartheta_3' - \vartheta_2'}.$$

Die fünfte Spalte der Tafel enthält $\vartheta_2 - \vartheta_1$, die sechste ϑ_2, die siebente $\vartheta_3 - \vartheta_2$ und die achte λ.

Ist für einen gegebenen Wert μ des Argumentes λ negativ, so ist

$$\vartheta = \vartheta_2 + \lambda (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

zu setzen; ist aber λ positiv, so hat man

$$\vartheta = \vartheta_2 + \lambda (\vartheta_3 - \vartheta_2),$$

wobei zu beachten ist, daß wenn $\mu + \mu' - \alpha \geqq 180^0$ ist, ϑ_2 negativ ist. Die wahre Länge β des Mercurs, bezogen auf das zugehörige Apogäum des Deferenten, ist

$$\beta = \mu - (\mu - \alpha) + \vartheta.$$

Sei als Beispiel für eine gegebene Zeit die Länge des Apogäums des Deferenten 190^0:

$$\mu = 102^0 \qquad \mu' = 81^0.$$

Dann hat man nach Spalte 3 und 4 $\mu - \alpha = 3^0 0'$ und nach Spalte 8: $\lambda = +52'$ $26'' = +0^0{,}8739$. Da λ positiv ist, so ist

$$\vartheta = \vartheta_2 + \lambda (\vartheta_3 - \vartheta_2),$$

und es ergibt sich mit dem geänderten Argumente $\mu + \mu' - \alpha = 84^0$ nach Spalte 6: $\vartheta_2 = 19^0 44'$ und nach 7: $\vartheta_3 - \vartheta_2 = 1^0 23'$; mithin $\vartheta = 20^0 57'$ und $\beta = 119^0 57'$. Die wahre Länge des Mercurs vom Frühjahrspunkt gezählt beträgt $309^0 57' = 9^0 57'$ Wassermann.

Durch diese Methode löst Ptolemaeus in einfacher und sinnreicher Weise das Problem, zu einer gegebenen Zeit den Ort des Mercurs in Länge zu berechnen.

Über die Stillstände des Mercurs.

Anschließend an die Betrachtungen über die Bewegung des Mercurs in Länge untersuchen wir, wie Ptolemaeus die Stillstände und die Größe des retrograden Bogens bestimmt, und nach welchen Gesichtspunkten er seine Tafeln über die Stationen entwirft. Es seien S und S' die Stillstandspunkte des Mercurs

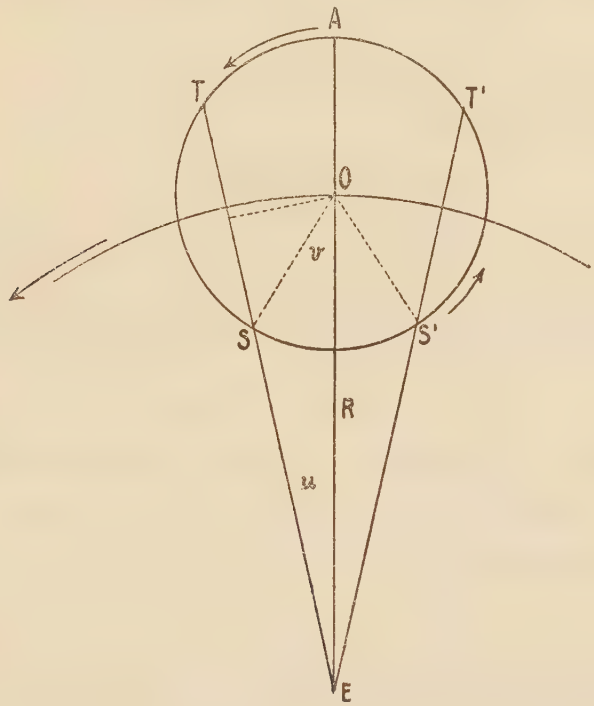

Fig. 25.

(Fig. 25), wenn sich der Mittelpunkt O des Epizykels vom Halbmesser r in der mittleren Entfernung R von der Erde E befindet und T und T' die Punkte, welche die gleiche Länge haben. Nach dem Satze des Apollonius bestehen dann die Beziehungen:

$$\frac{1}{2}\frac{TS}{SE} = \frac{\omega}{\omega'} \quad \frac{1}{2}\frac{T'S'}{S'E} = \frac{\omega}{\omega'},$$

worin ω die zodiakale und ω' die anomalistische Geschwindigkeit darstellt. Aus der ersten Relation ergibt sich:

$$\frac{\frac{1}{2}TS}{\frac{1}{2}TS+SE} = \frac{\omega}{\omega+\omega'}$$
$$\frac{SE}{\frac{1}{2}TS+SE} = \frac{\omega'}{\omega+\omega'}.$$

Setzt man $\sphericalangle OES = u$, so ist

$$\frac{1}{2}TS+SE = R\cos u$$

und mithin:

$$\frac{1}{2}TS = \frac{\omega}{\omega+\omega'} R\cos u.$$

$$SE = \frac{\omega'}{\omega+\omega'} R\cos u.$$

Da aber

$$SE(SE+ET) = R^2-r^2$$

ist, so folgt durch Substitution:

$$\cos^2 u = \frac{(R^2-r^2)(\omega+\omega')^2}{R^2\omega'(2\omega+\omega')}$$

und hieraus geht hervor, daß Stationen nur dann eintreten, wenn $\cos^2 u < 1$ d. h. $\frac{\omega}{\omega'} < \frac{r}{R-r}$ ist, eine Bedingung, welche für den Mercur erfüllt ist. Es sei v der Bogenabstand des Punktes S vom Perigäum des Epizykels; dann ist

$$\sin(u+v) = \frac{R}{r}\sin u,$$

und da die Stationen in der Nähe des Perigäums stattfinden, so ist für u—v der Wert zu nehmen, welcher kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Für die Dauer τ einer halben Retrogradation erhält man

$$\tau = \frac{v}{\omega'}$$

und für die Hälfte σ des retrograden Bogens, wenn man berücksichtigt, daß der Mittelpunkt des Epizykels in der Zeit τ sich um den Bogen $\tau\omega$ bewegt:

$$\sigma = u-\tau\omega.]$$

Für den Mercur ist $R = 60$, $r = 22\frac{1}{2}$

$$\omega = 0^0{,}985\,635$$
$$\omega' = 3^0{,}106\,699$$
$$\omega+\omega' = 4^0{,}092\,334$$
$$2\omega+\omega' = 5^0{,}077\,969$$

$$\log (R-r) = 1{,}574031$$
$$\log (R+r) = \underline{1{,}916454}$$
$$\log (R^2-r^2) = 3{,}490485$$
$$\log \omega' = 0{,}492299$$
$$\log (2\omega+\omega') = \underline{0{,}705690}$$
$$\log \omega'(2\omega+\omega') = 1{,}197989$$
$$\log \frac{R^2-r^2}{\omega'(2\omega+\omega')} = 2{,}292496$$
$$\log \sqrt{\frac{R^2-r^2}{\omega'(2\omega+\omega')}} = 1{,}146248$$
$$\log (\omega+\omega') = \underline{0{,}611971}$$
$$\log R\cos u = 1{,}758219$$
$$\log R = \underline{1{,}778151}$$
$$\log \cos u = 9{,}980068-10$$
$$u = 17^0\,13'\,35''$$
$$\log \sin u = 9{,}471509-10$$
$$\log R = \underline{1{,}778151}$$
$$\log R\sin u = 1{,}249660$$
$$\log r = \underline{1{,}352183}$$
$$\log \sin (u+v) = 9{,}897477-10$$
$$u+v = 52^0\ 9'\,36{,}''3$$
$$v = 34^0\,56'\ 1{,}''3$$
$$v = 34^0{,}933694$$
$$2v = 69^0{,}867389$$
$$\log 2v = 1{,}844277$$
$$\log \omega' = \underline{0{,}492299}$$
$$\log 2\tau = 1{,}351978$$
$$2\tau = 22{,}4894$$

Ptolemaeus findet $22^1/_2$ Tage als Dauer der Retrogradation in der mittleren Entfernung.

$$\log 2\tau = 1{,}351978$$
$$\log \omega = \underline{0{,}993716-1}$$
$$\log 2\tau\omega = 1{,}345694$$
$$2\tau\omega = 22^0{,}16685$$
$$2u = 34^0\,27'\,10''$$

$$2\tau\omega = 22^0 10' 0,''6$$
$$2\sigma = 12^0 17' 9,''4,$$

während Ptolemaeus $12^0 17' 10''$ angibt.

Der retrograde Bogen 2σ erscheint von der Erde aus gesehen am kleinsten, wenn der in der Mitte der Stillstände liegende Punkt in die Richtung des Apogäums des exzentrischen Kreises fällt und am größten, wenn der Mittelpunkt des Bogens um 120^0 zu beiden Seiten vom Apogäum entfernt ist; im ersten Falle erhält Ptolemaeus:

$$R_1 = 68^p 36'$$
$$2v_1 = 65^0 44' 52''$$
$$2\sigma_1 = 7^0 54' 22''$$
$$2\tau_1 = 21 \text{ Tage}$$

und im zweiten

$$R_2 = 55^p 34'$$
$$2v_2 = 71^0\ 0' 30''$$
$$2\sigma_2 = 15^0 12' 46''$$
$$2\tau_2 = 23 \text{ Tage.}$$

Zur Angabe der Stillstandspunkte bei beliebiger Lage des Epizykelmittelpunktes dienen Tafeln, von denen die beiden ersten Spalten als Argument die mittlere Länge enthalten und die beiden folgenden die Anomalie der Stationen geben. Angenommen es genüge für ein gegebenes Argument die zugehörige Entfernung R' des Epizykelzentrums von der Erde der Ungleichheit

$$R \leqq R' \gtrless R_1.$$

Das entsprechende v' bestimmt dann Ptolemaeus aus der Proportion:

$$\frac{v'-v}{v_1-v} = \frac{R'-R}{R_1-R}.$$

Ist aber $R_2 \leqq R' \gtrless R$, so benutzt er die Relation

$$\frac{v'-v}{v_2-v} = \frac{R'-R}{R_2-R}.$$

Wählt man als Beispiel die mittlere Länge 30^0, so ist $R' = 66^p 35'$, und mithin erhält man aus der ersten Proportion $v' = 33^0 21'$ als Bogenabstand der Stillstandspunkte vom Perigäum des Epizykels. Der Abstand vom Apogäum, die Anomalien ber beiden Stationen, sind daher

$$146^0 39' \qquad 213^0 21',$$

welche Werte man in der Tafel findet.

Tafel für die Stillstandspunkte des Mercurs.

Argument.		1. Station.	2. Station.
0°	360°	147° 14′	212° 46′
6	354	147 13	212 47
12	348	147 8	212 52
18	342	147 1	212 59
24	336	146 51	213 9
30	330	146 39	213 21
36	324	146 25	213 35
42	318	146 11	213 49
48	312	145 55	214 5
54	306	145 39	214 21
60	300	145 23	214 37
66	294	145 8	214 52
72	288	144 58	215 2
78	282	144 52	215 18
84	276	144 46	215 14
90	270	144 40	215 20
96	264	144 36	215 21
102	258	144 33	215 27
108	252	144 30	215 30
114	246	144 30	215 30
120	240	144 29	215 31
126	234	144 29	215 31
132	228	144 30	215 30
138	222	144 31	215 29
144	216	144 33	215 27
150	210	144 35	215 25
156	204	144 37	215 23
162	198	144 38	215 22
168	192	144 39	215 21
174	186	144 40	215 20
180	180	144 40	215 20

Geometrische Annahmen zur Erklärung der Schwankungen des Mercurs in der Breite.

Wenn man sich die Orte, welche der Mercur im Laufe eines Jahres der Reihe nach am Himmelsgewölbe einnimmt, durch einen stetigen Linienzug verbunden denkt, so wird diese Linie sowohl nördlich wie südlich der Ebene der scheinbaren Sonnenbahn verlaufen und nur einzelne Punkte mit dieser gemeinsam haben. Zur Erklärung der Schwankungen des Mercurs in der Breite nimmt Ptolemaeus (Fig. 26) die Ebene des Deferenten als beweglich an und läßt sie um die Gerade $O'O''$, welche von der Erde gesehen um 90° vom Apogäum O_1 und Perigäum O_2 entfernt ist, periodische Schwingungen von der Dauer eines Jahres und der Amplitude $1^1/_2{}^0$ ausführen, durch welche die Punkte O_1 und O_2 bald $^3/_4{}^0$ nördlich, bald $^3/_4{}^0$ südlich der Ekliptik erscheinen. Die Bewegung ist so eingestellt, daß, wenn der Epizykelmittelpunkt O sich in O' und O'' befindet, der Deferent mit der Ekliptik zusammenfällt; liegt O auf dem Bogen $O'O_2O''$ so ist

O_2 südlich, O_1 nördlich und gehört O dem Bogen $O''O_1O'$ an, so ist O_2 nördlich und O_1 südlich. Das Epizykelzentrum ist daher stets durch den Deferenten nach Süden getragen, berührt in $O'O''$ die Ekliptik und erreicht in O_1 und O_2 seine größte südliche Abweichung.

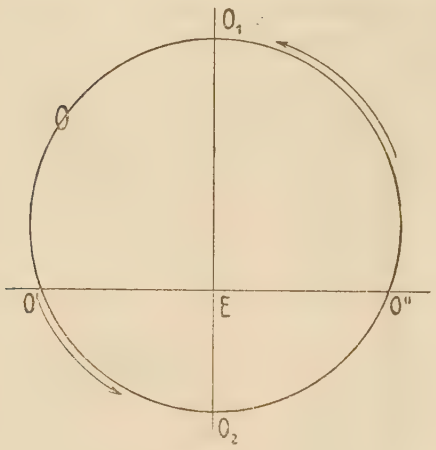

Fig. 26.

Denkt man sich zu einer gegebenen Zeit die Neigung des Deferenten gegen die Ekliptik sowie die Lage des Punktes O gegeben, so liegen das von der Erde beobachtete Apogäum C und Perigäum C' des Epizykels in der auf OE zu dem Deferenten errichteten senkrechten Ebene. Die Neigung der Geraden CC' gegen OE bezeichnet Ptolemaeus mit ἔγκλισις; sie verschwindet in O_1 und O_2 und erreicht in O' und O'' ihre größten Werte. Ebenso lege man durch O die zu CC' normale Eebene, welche den Epizykel in der Geraden DD' durchschneidet. Die Schnittlinie DD' ist im allgemeinen gegen den Deferenten geneigt und bewirkt die λόξωσις, welche in O' und O'' gleich Null ist und in O_1 und O_2 den größten Wert besitzt. In jedem Punkte O während des Umlaufes ist die Ebene des Epizykels durch die Richtungen von zwei zu einander senkrechten Durchmessern bestimmt. Zur Entwerfung von Tafeln betrachtet Ptolemaeus die Stellungen des Epizykels in den Lagen O_1, O', O_2, O'' und berechnet für diese die Breiten, während er sie in den übrigen Punkten der Bahn durch Interpolation ermittelt. Im besonderen weist er nach, daß die Unterschiede, welche in der Längenbewegung durch diese Annahme entstehen von der Größenordnung der Beobachtungsfehler sind, so daß eine Reduktion auf die Ekliptik unterbleiben darf.

Über den Anschluss der Mercurbewegung an die mittlere Sonne.

Delambre hat die Mercurtheorie, ausgehend vom kopernikanischen Systeme, in der Weise leichthin beurteilt, daß er die Erdbahn als kreisförmig und nur die Mercurbahn als exzentrisch ansieht, eine völlig ungerechtfertigte Vereinfachung, die zu einer Reihe von Widersprüchen führen muß. So findet er es sonderbar, daß Ptolemaeus die Elongationen vom mittleren anstatt vom wahren Sonnenorte rechnet und daß er die Lage der Symmetrieachse falsch bestimmt. In der ptolemaeischen Theorie lassen sich die Ungleichheiten, welche durch die Exzentrizität der Erd- und Mercurbahn entstehen, nicht trennen; daher sind alle Versuche, die Größe der Exzentrizität der Mercurbahn aus den ptolemaeischen Konstanten bestimmen zu wollen, hinfällig; auf diese Weise vermag man nicht, der Mercurtheorie gerecht zu werden. Bei sorgfältiger Berechnung der Elongationen

unter Berücksichtigung der Exzentrizitäten und der Neigungen der großen Achsen erkennt man den Grund, der Ptolemaeus dazu führt, die Elongationen auf den mittleren Sonnenorte zu beziehen; es zeigt sich, daß die größten Elongationen des Mercurs von dem mittleren Orte in dem Intervalle von 19°—26° schwanken, während sie sich, bezogen auf die wahre Sonne, in dem größeren Intervalle von 17°—28° bewegen. Unter Zugrundelegung der von Newcomb für das Jahr 1905 gegebenen Mercurelemente enthält die folgende Tafel die größten Elongationen des Mercurs sowohl vom wahren wie vom mittleren Sonnenorte; gleichzeitig ist eine Neubestimmung der ptolemaeischen Konstanten vorgenommen und mit ihrer Hilfe sind die Elongationen nach Ptolemaeus berechnet. Es zeigt

Apogäum 317°55′.

Arg.	West. Elong. n. Ptolemaeus.	West. Elong. vom mittleren Sonnenorte.	Dif.	West. Elong. vom wahren Sonnenorte.	Östl. Elong. n. Ptolemaeus.	Östl. Elong. vom mittleren Sonnenorte.	Dif.	Östl. Elong. vom wahren Sonnenorte.
0°	20° 49′	20° 43′	— 6′	22° 1′	20° 49′	20° 53′	+ 4′	19° 35′
10	20 22	20 15	— 7	21 19	21 19	21 16	— 3	20 14
20	20 0	19 51	— 9	20 35	21 51	21 41	— 10	20 57
30	19 41	19 32	— 9	19 56	22 25	22 8	— 17	21 44
40	19 28	19 18	— 10	19 22	22 59	22 37	— 22	22 33
50	19 19	19 10	— 9	18 54	23 33	23 7	— 26	23 23
60	19 15	19 7	— 8	18 31	24 6	23 37	— 29	24 13
70	19 16	19 8	— 8	18 13	24 36	24 6	— 30	25 1
80	19 23	19 14	— 9	18 3	25 1	24 34	— 27	25 45
90	19 34	19 25	— 9	17 59	25 22	24 58	— 24	26 24
100	19 50	19 40	— 10	18 2	25 37	25 18	— 19	26 56
110	20 11	19 59	— 12	18 12	25 45	25 32	— 13	27 17
120	20 36	20 22	— 14	18 29	25 46	25 40	— 6	27 33
130	21 4	20 48	— 16	18 53	25 40	25 41	+ 1	27 36
140	21 35	21 18	— 17	19 24	25 28	25 34	+ 6	27 28
150	22 7	21 51	— 16	20 2	25 10	25 19	+ 9	27 8
160	22 41	22 26	— 15	20 45	24 47	24 57	+ 10	26 38
170	23 15	23 3	— 12	21 33	24 19	24 28	+ 9	25 58
180	23 48	23 40	— 8	22 24	23 48	23 54	+ 6	25 10
190	24 19	24 17	+ 2	23 17	23 15	23 18	+ 3	24 18
200	24 47	24 54	+ 10	24 11	22 41	22 42	+ 1	23 25
210	25 10	25 21	+ 11	24 57	22 7	22 3	— 4	22 27
220	25 28	25 45	+ 17	25 40	21 35	21 28	— 7	21 33
230	24 40	26 1	+ 21	26 17	21 4	20 58	— 6	20 42
240	25 46	26 10	+ 24	26 45	20 36	20 31	— 5	19 56
250	25 45	26 10	+ 25	27 3	20 11	20 10	— 1	19 17
260	25 37	26 2	+ 25	27 12	19 50	19 54	+ 4	18 44
270	25 22	25 46	+ 24	27 11	19 34	19 43	+ 9	18 18
280	25 1	25 23	+ 22	27 0	19 23	19 36	+ 13	17 59
290	24 36	24 55	+ 19	26 41	19 16	19 34	+ 18	17 48
300	24 6	24 21	+ 15	26 14	19 15	19 36	+ 21	17 43
310	23 33	23 45	+ 12	25 40	19 19	19 41	+ 22	17 46
320	22 59	23 7	+ 8	25 1	19 28	19 49	+ 21	17 55
330	22 25	22 28	+ 3	24 18	19 41	20 1	+ 20	18 11
340	21 51	21 51	0	23 30	20 0	20 15	+ 15	18 33
350	21 19	21 15	— 6	22 47	20 22	20 33	+ 11	19 1
360	20 49	20 43	— 6	22 1	20 49	20 53	+ 4	19 35

sich, daß die Abweichungen zwischen dem kopernikanischen und ptolemaeischen Systeme $^1/_2{}^0$ nicht übersteigen.

Dem Ptolemaeus haben wir das Verdienst zuzuschreiben, auf seine Planetentheorien eine kreisförmige, um einen exzentrisch gelegenen Punkt als gleichmäßig erfolgende Bewegung angewendet und somit eine Bewegungsform aufgefunden zu haben, welche sich eng an den Kepplerschen Flächensatz anschließt. Um diesen Zusammenhang zu beleuchten, nehme man an, ein Himmelskörper P beschreibe eine ellipsenförmige Bahn mit den Brennpunkten F und F' unter Zugrundelegung des Kepplerschen Gesetzes:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const},$$

wenn $PF = r$ den Radius vektor und φ die Anomalie darstellt. Ist $\sphericalangle PF'F = \psi$ und $PF' = r'$, so ergibt sich für die von dem Himmelskörper in dem Zeitelement dt beschriebene Wegstrecke

$$r' \frac{d\psi}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt},$$

aus der durch Multiplikation mit r folgt

$$r'r \frac{d\psi}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}.$$

Wenn man die Halbachse der Ellipse mit a und b und ihre numerische Exzentrizität mit ε bezeichnet, so ist

$$b^2 \gtrless rr' \leqq a^2 \quad \text{oder}$$

$$1 - \varepsilon^2 \gtrless \frac{rr'}{a^2} \leqq 1.$$

Ist daher ε hinreichend klein, so hat rr' einen konstanten Wert, und es folgt durch Integration

$$\psi = Ct + C'.$$

Der Himmelskörper bewegt sich daher in der Weise, daß der Radius vektor r' in gleichen Zeiten gleiche Winkel überstreicht. Betrachtet man nunmehr die Ellipse als Kreislinie. so erkennt man die Identität mit den ptolemaeischen Annahmen.

Lebenslauf.

Ich, Paul Ferdinand Wilhelm Boelk, evangelischer Konfession, wurde am 22. März 1883 in Berlin als Sohn des Polizeibeamten Ferdinand Boelk geboren. Ostern 1893 trat ich in die Friedrichs-Werdersche Oberrealschule zu Berlin ein, die ich Ostern 1902 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um mich an der Berliner Universität und der Technischen Hochschule zu Charlottenburg mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien zu widmen. Am 12. Februar 1907 legte ich die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab, genügte meiner Militärpflicht und bestand am 6. Dezember 1910 das Rigorosum. An den Vorlesungen und Übungen folgender Herren Professoren und Dozenten nahm ich teil in Berlin: Bauschinger, Blasius, Dilthey, Drude †, Fischer, Foerster, Frobenius, Gabriel, Helmert, Knoblauch, Landau, Lummer, Neesen, Paulsen †, Planck, Pringsheim, Schottky, H. A. Schwarz, Stumpf, Warburg; in Charlottenburg: Hessenberg, Jolles.